د . معتوق امحمد

أستاذ التعليم العالي

جامعة ابن خلدون، تيارت

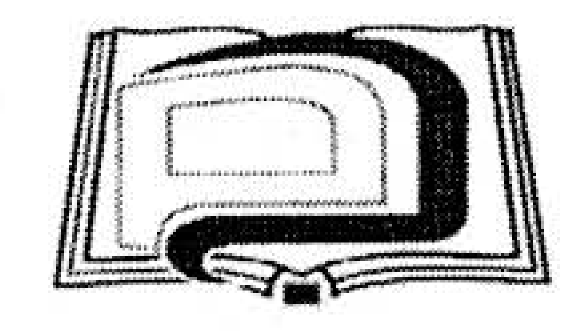
الإحصاء الرياضي والنماذج الإحصائية

سلسلة دروس مع تمارين مختارة

موجه إلى الشعب التالية:

- شعب علوم الطبيعة والحياة، علوم الأرض والكون
- شعب العلوم الإنسانية (العلوم التجارية وعلوم التسيير، علم الاجتماع، علم النفس. . .)

إعادة الطبعة الأولى

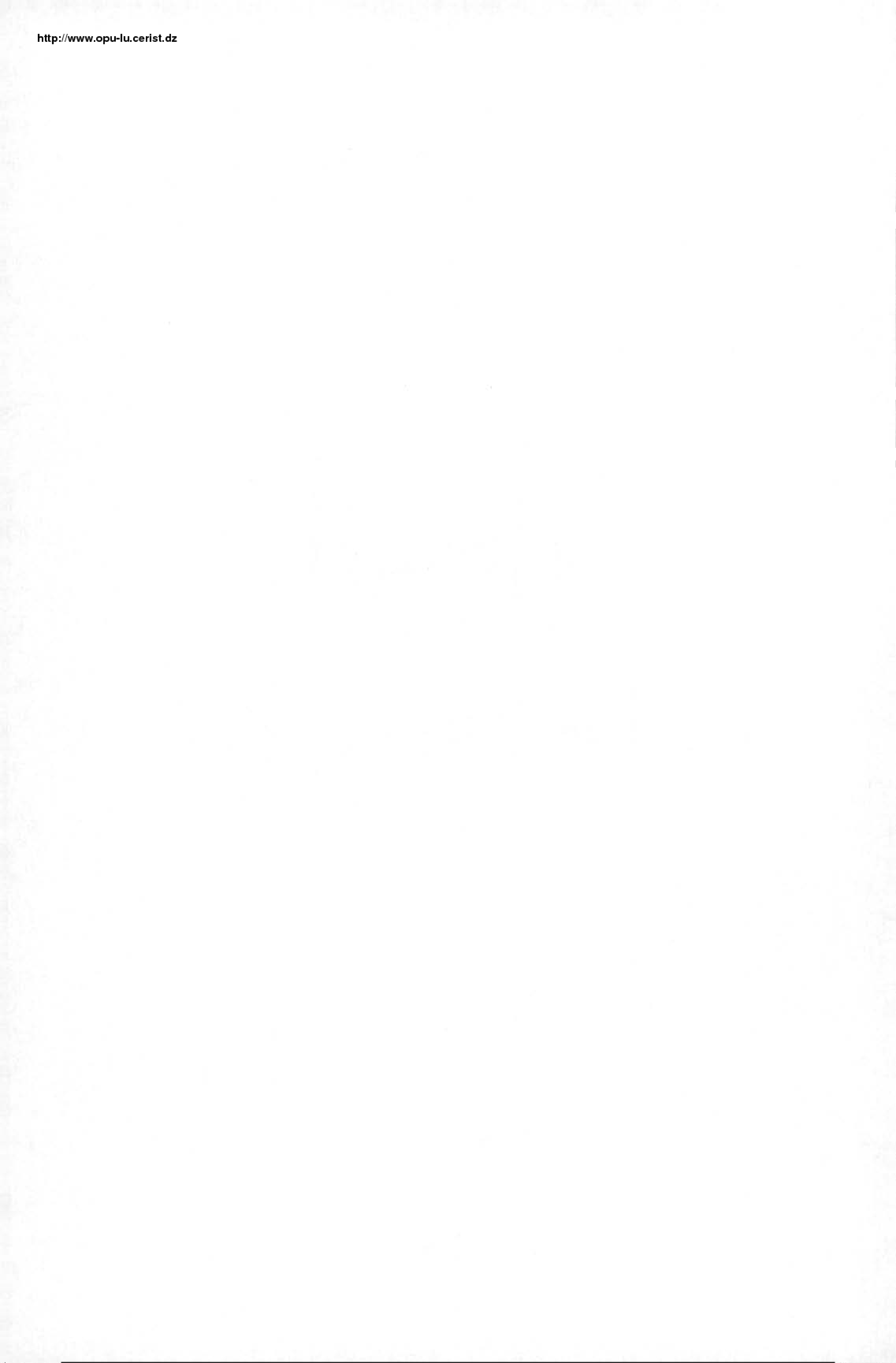


ديوان المطبوعات الجامعية

رقم النشر: 4.01.4918
رقم ر.د.م.ك (ISBN): 978.9961.0.1101.0
رقم الإيداع القانوني: 4156 -2007

إهداء

إلى روح والدي الحاج المختار (رحمه الله) .



مقدمة الطبعة الثانية

إن المكتبة العربية تفتقر كثيرا إلى الكتب العلمية في مختلف التخصصات التطبيقية والتكنولوجيا، كما أن الجامعة الجزائرية تعتمد كليا على المراجع الأجنبية في هذا النوع من العلوم، الأمر الذي خلق صعوبات لدى طلبة الجيل الحالي الذي أمضى جزءا غير يسير من مشواره الدراسة يدرس باللغة العربية. ومن منطلق أن الإحصاء أصبح يلعب دورا أساسيا في كل العلوم المختلفة، كعلوم التسيير والإجتماع وعلم الأحياء والطب وغيرها...، فقد جاء هذا الكتاب كأداة مساعدة للجميع، بأسلوب سهل ومختصر، يعتمد على أكثر عدد من الأمثلة والتمارين، وبعيدا عن العمليات الرياضية ذات البرهنة المعقدة.

إن الهدف من هذا المرجع هو تقديم الأسس الأولية الضرورية التي تفيد كل فرد حسب تخصصه، متبعا كل المقررات التي تدرس حاليا في الجامعة الجزائرية، في التخصصات السابقة الذكر، على أن الرموز المستعملة فيه هي رموز لاتينية، الهدف منها هو توحيد المصطلحات العالمية، تسهيلا للطالب لمواصلة البحث مع لغات أخرى.

كمت هو الحال في الطبعة الأولى، فقد شمل هذا العمل ستة فصول، منقحة مع إضافة بعض التعاريف لبعض القوانين، كما أن كل فصل قد تدعم .بمجموعة من الأمثلة و التمارين المحلولة، مع إضافة مجموعة أخرى من المسائل والتمارين الغير المحلولة في نهاية كل فصل، حتى نتيح الفرصة للطالب لإختبار قدراته الإستعابية.

جاء الفصل الأول كمقدمة لنظرية الإحتمال، به قسم خاص بالمتغيرات العشوائية والتوزيعات الإحتمالية؛ وتناول الفصل الثاني، الثالث والرابع إختبار الفرضيات، نظرية العينات ونظرية التقدير على التوالي، كمقدمة لتحليل البيانات الإحصائية، وهي تفيد بشكل أكبر، الذين يعتمدون على التجارب

العلمية، وتحليل نتائجها؛ أما الفصل الخامس فقد تناول نظرية الإرتباط، التي تعد ذات أهمية قصوى في حد ذاتها، وهي بذلك تكون مقدمة لجميع الذين يبحثون كيفية بناء نماذج رياضية، ذات متغير واحد (الإرتباط البسيط)، أو ذات عدة متغيرات (الإرتباط متعدد)؛ وكانت خاتمة الكتاب بفصل سادس خاص بالسلاسل الزمنية وتحليليها، نظرا لكون الكثير من البيانات الإحصائية تعطى بدلالة الزمن، خاصة تلك التي تدرس بعض الظواهر الإجتماعية والمؤشرات الإقتصادية.

نأمل أن يكون هذا العمل البسط، ثمرة طيبة بين أيدي طلبتنا الكرام، وأن يحقق الفائدة المرجوة منه، وأن يكون فاتحة لأعمال أخرى وصدقة جارية للذي سهر من أجل تعليمي، والدي الحاج المختار (رحمة الله عليه) وللشهداء الأبرار الذين سقطوا من أجل أن نحيا نحن في هذا الوطن الغالي أحرارا شرفاء.

الأستاذ: م. معتوق

الفصل الأول
نظرية الإحتمالات

مقدمة:

نظرية الإحتمالات هي قسم من الرياضيات، يدرس الاتجاه العام للظواهر العرضية (العشوائية). تلعب هذه النظرية دورا مهما في مختلف العلوم، خاصة في العلوم الإقتصادية وعلوم الطبيعة والحياة، حيث يتم من خلالها دراسة مختلف الظواهر العرضية التي تتكرر والتي تستوجب وضع قوانين يمكن الحكم على صحته أو خطإه.

1.1- مبادئ الحساب الإحتمالي:

1.1.1- مفاهيم أساسية:

– **التجربة:** تعد من أهم المفاهيم في نظرية الإحتمالات، فهي تقوم على أساس التأكد من تحقق وصول بعض الظروف المشتركة لتجربة ما (ظروف من صنع الإنسان أو ظروف وليدة الصدفة). مثل رمي زهرة نرد، دراسة كمية التساقط في منطقة ما...

وتنقسم التجربة إلى تجربة نظامية، حيث أنه يمكن توقع نتائجها سلف على أساس قوانين علمية معروف، إنطلاقا من جملة من الشروط. والتجربة العشوائية، وهي التجربة التي يمكن تكرارها، على أن نتائجها غير محددة سلفا، فهي تعتمد على الصدفة رغم إنطلاقها من نفس الشروط.

– **فراغ العينة:** وهي مجموعة النتائج الممكنة الكلية لتجربة ما، ويمكن أن يكون غير منته (عدد غير محدود من الإمكانات)، ومنته (عدد غير محدود من الإمكانات). يرمز لفراغ العينة بالرمز Ω.

– **الحدث و أنواعه:** إن النتيجة أو النتائج المحددة من النتائج الممكنة لتجربة ما تشكل حدثا. وينقسم الحدث إلى: حدث بسيط، غير قابل للتجزئة، فهو مجموعة جزئية من فراغ العينة؛ حدث مركب، أمكن تفكيكه إلى حوادث بسيطة؛ حدث أكيد وهو حدث مؤكد يحوي جميع الحوادث البسيطة؛ حدث مستحيل، وهو حدث غير قابل للتحقق، أي أنه مجموعة خالية من المجموعة الكلية التي تمثل فراغ العينة؛ حدث متمم أو معاكس وهو حدث $\overline{A}$ مرتبط بالمجوعة Ω، يتكون من مجموعة الإمكانات الغير محققة لـــ A، حيث:

$$\overline{A} = \Omega - A \qquad (1.1)$$

حوادث متنافية و هي حوادث لا يمكن وقوعها في أن واحد ووقوع أحدها يمنع وقوع الأخر؛ حوادث غير متنافية، وهي عكس المتنافية، فوقوع A لا يمنع وقوع الحدث B ؛ حودث مستقلة و هي حوادث لا يؤثر وقوع أحدهما على الأخر؛ حوادث غير مستقلة أي مرتبطة وهي حوادث شرطية، فوقوع الحدث A يشترط وقوع الحدث B.

2.1.1- تعريف الإحتمال:

إذا كان m هو عدد الحالات الملائمة للحدث A ؛ وكان n هو عدد حالاته الممكنة، فإن إحتمال وقوع الحدث A يكون وفق العلاقة التالية:

$$1 \leq m \leq n \quad \text{حيث} \quad P(A) = \frac{m}{n} \qquad (1.2)$$

➢ **مثـــــال 1:**

ترمى قطعة نرد مرة واحدة، نجد أن فراغ العينة (الحالات الممكنة) لهذه التجربة هو:

$$n = 6 \quad \text{أي أن} \qquad \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ولحساب إحتمال الحصول على عدد زوجي، فإن الحالات الملائمة هي:

$P = \{ 2, 4, 6\}$ أي أن $m = 3$

إذن: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = 0.5$

➢ **مثـــــال 2:**

يحتوي كيس على 10 كرات، 7 منها حمراء اللون. أحسب إحتمال الحصول على 4 كرات حمراء إذا سحبنا من الكيس 6 كرات.

إن إحتمال الحصول على 4 كرات حمراء من الكيس بعد سحب 6 كرات هو:

m: عدد الحالات الملائمة وهو سحب 6 من 10 أي:

$$C_{10}^{6} = \frac{10!}{(10-6)! \times 6!} = 210$$

n: عدد الحالات الملائمة وهو سحب 6 من 10 أي: $C_7^4 \times C_3^2 = 105$

إذن:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{105}{210} = 0.5$$

❖ **صيغة أخرى لتعريف الإحتمال:**

إن إحتمال تحقق الحدث A المرتبط بتجربة عشوائية ما هو نهاية التكرار النسبي للحدث A وذلك عندما تتكرر هذه التجربة في عدد كبير من المرات، أي أن:

$$p(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n} \qquad (1.3)$$

3.1.1- خواص الإحتمال:

إذا كان A حدث ما، فإن:

- $0 \leq P(A) \leq 1$،
- إذا كان $\overline{A}$ حدث متمم لـــ A، فإن:

$p(A)+p(\overline{A})=p(A\cup\overline{A})=p(\Omega)=1$،

ومنه: $p(\overline{A})=1-p(A)$.

4.1.1- الخواص الأساسية في نظرية الإحتمال:

ا)– قاعدة الجمع للأحداث المتنافية:

إذا كان A و B حدثين متنافيين، فإن تحقق مجموعهما هو مجموع إحتمالهما، أي أن:

$$P(AUB)=P(A)+P(B) \qquad (1.4)$$

وبصفة عامة إذا كان لدينا مجموعة من الحوادث $A_1, A_2, \ldots\ldots.A_n$ فإن:

$$P(A_1UA_2\ldots\ldots UA_n) = P(A_1) + P(A_2)\ldots\ldots+P(A_n)$$

أي أن:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \qquad (1.5)$$

➢ مثـــــال:

ترمــــى زهرة نرد مرة واحدة. ما هو إحتمـــال الحصول على الرقم 1 أو الرقم 2.

إن إحتمال الحصول على الرقم 1 هو: $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{6}=$

وإحتمال الحصول على الرقم 2 هو: $P(B)=\frac{m}{n}=\frac{1}{6}=$

وعليه هو إحتمال الحصول على الرقم 1 أو الرقم 2 هو:

$$p(AUB) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

ب) – قاعدة الجمع للأحداث الغير المتنافية:

إذا كان A و B حدثين غير متنافيين، فإن تحقق مجموعهما هو مجموع إحتمالهما ولكن نستثني إحتمال وقوعهما معا في آن واحد، أي أن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad (1.6)$$

ويمكن تعميم هذه القاعدة على أكثر من حدثين، فلو كان لدينا ثلاثة حوادث A و B و C فإن:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

ويمكن البرهنة على ذلك بسهولة، وذلك بفرض أن BUC هي مجموعة واحدة ولتكن D ومن ثم تطبيق القاعدة (1.6)، مع ملاحظة أن عملية U هي توزيعية بالنسبة لـــ $\cap$.

وبصفة عامة إذا كان لدينا أكثر من ثلاثة حوادث فإن صيغة الجمع للأحداث الغير المتنافية تأخذ الشكل التالي:

$$P(\cup_{i=1}^{n} Ai) = \sum_{i=1}^{n} P(Ai) - \sum p(Aj \cap Ak) + \sum P(Ai \cap Aj \cap Ak) - \dots\dots\dots \qquad (1.7)$$
$$\dots\dots\dots\dots + (-1)^{n-1} P(A1 \cap A2 \dots \cap Ak)$$

ج)– قاعدة الضرب للأحداث المستقلة:

إن إحتمال وقوع الحدثين A و B في آن واحد، مع العلم أنهما مستقلين، هو حاصل ضرب إحتمال وقوع كل منهما، أي أن:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) \qquad (1.8)$$

وبصفة عامة، إذا كان لدينا أكثر من حدثين مستقلين مثنى مثنى، فإن القاعدة(1.7) تصبح على الشكل التالي:

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \bigcap_{i=1}^{n} P(A_i) \qquad (1.9)$$

➢ **تمـــــرين:**

يحتوي صندوق على 10 مصابيح كهربائية، 7 منها صالحة و3 غير صالحة. سحبنا عشوائيا من الصندوق مصباحين (سحب مع الإرجاع للمصباح الأول). أحسب ما يلي:

- إحتمال المصباحين صالحين،
- إحتمال المصباحين غير صالحين،
- إحتمال الأول صالح و الثاني غير صالح.

➢ **الحـــــل:**

ا) - إحتمال المصباحـــين صالحين، يعني المصبـــاح الأول صالح A والثاني صالح B:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{49}{100} = 0.49$$

لأن: $P(A) = \frac{7}{10}$ و $P(B) = \frac{7}{10}$

ب)- إحتمال المصباحين غير صالحين، يعني الأول غير صالح C و الثاني غير صالح D:

$$P(C \cap D) = P(C) \times P(D) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{100} = 0.09$$

ج)- إحتمال الأول صالح و الثاني غير صالح، يعني الأول صالح A و الثاني غير صالح C:

$$P(A \cap C) = P(A) \times P(C) = \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{21}{100} = 0.21$$

د) – قاعدة الضرب للأحداث المرتبطة (الإحتمال الشرطي):

إن تحقق الحدث A يكون مرتبط بتحقق الحدث B بصورة مسبقة، أي أن تحقق A يشترط تحقق B. نسمي في هذه الحالة حساب وقوع A بشرط B بالإحتمال الشرطي و نكتب:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad \text{بحيث } P(B)\neq 0 \qquad (1.10)$$

أو

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad \text{بحيث } P(A)\neq 0 \qquad (1.11)$$

➢ **تمـــــرين:**

نسبة الرسوب، حسب محاضر الامتحانات النهائية لمعهد ما، هو 15% في مقياس الإحصاء؛ وفي مقياس الرياضيات هو 25% ؛ وفي المقياسين معا هو 10%. أخذنا طالبا عشوائيا من المحاضر. إذا كان هذا الطالب راسبا في الرياضيات ما هو إحتمال أن يرسب في الإحصاء؟. إذا كان هذا الطالب راسبا في الإحصاء ما هو إحتمال أن يرسب في الرياضيات؟. ماهو إحتمال أن يرسب في الرياضيات أو في الإحصاء؟.

➢ **الحـــــل:**

إحتمال أن يرسب في الرياضيات هو $P(A) = 0.15$

إحتمال أن يرسب في الإحصاء هو $P(B) = 0.25$

إحتمال أن يرسب في الرياضيات و الإحصاء معا هو

$$P(A\cap B)=0.10$$

- إحتمال أن يرسب في الإحصاء مع العلم أنه (أي بشرط) راسبا في الرياضيات هو:

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.10}{0.15}$$

• إحتمال أن يرسب في الرياضيات مع العلم أنه راسبا في الإحصاء هو:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.10}{0.25}$$

• إحتمال أن يرسب في الرياضيات أو في الإحصاء هو:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.15+0.25-0.10=0.30$$

هـ) – نظرية بايز:

تظهر نظرية بايز كيفية حساب الإحتمالات الشرطية لحوادث متنافية تشكل مجموعة كلية و مرافقة لحدوث الحدث A.

لنفترض أنه لدينا مجموعة من الحوادث المتنافية $B_1, B_2, \ldots B_n$ مشكلة مجموعات جزئية من المجموعة الكليةΩ ؛ و لنفترض الحدث A و الذي يتحقق بشرط تحقق أحد الحوادث السابقة $B_1, B_2, \ldots B_n$.

نريد حساب الإحتمالات الشرطية $P(B_i/A)$ وذلك بمعلومية $P(Bi)$، أي بشرط تحقق $P(Bi)$، فيكون لدينا:

من جهة ثانية لدينا:

$$P(Bi/A)=\frac{P(A\cap Bi)}{P(A)}\Rightarrow P(A\cap Bi)=P(Bi/A)\times P(A).......2$$

وحيث أن الطرفين 1 و 2 متساويان، يكون لدينا:

$$P(A\cap B_i)=P(A)\times P(B_i/A)=P(Bi)\times P(A/B_i)$$

بالقسمة على $P(A)$ حيث $P(A)\neq 0$ نحصل على:

$$P(B_i/A)=\frac{P(B_i)\times P(A/B_i)}{P(A)}\qquad (*)$$

الحدث A لا يتحقق إلا بتحقق أحد هذه الحوادث، فإن:

$$P(A)=\sum P(B_i)\times P(A/B_i)$$

وبالتعويض في المعادلة (*) نجد:

$$P(B_i/A)=\frac{P(B_i)\times P(A/B_i)}{\sum P(B_i)\times P(A/B_i)} \qquad (1.12)$$

وهي العلاقة النهائية لنظرية بايز.

➢ **تمـــــرين:**

تملك مؤسسة إنتاجية ثلاث آلات للإنتاج، بنسب إنتاج هي على التوالي: 60%، 30%، 10% من إجمالي إنتاج المؤسسة. فإذا كانت نسبة الإنتاج الصالح لهذه الآلات هي على التوالي: 98%، 97%، 96%. سحبنا بصورة عشوائية وحدةمن المؤسسة، ووجد بأنها فاسدة، فما هو إحتمال أن تكون هذه الوحدة من إنتاج الألة الثالثة.

➢ **الحـــــل:**

نسمي الآلات الثلاث على التوالي A، B و C وهي ثلاث مجموعات جزئية متنافية، إتحادهما يشكل المجموعة الكلية (المؤسسة) و نرمز للوحدة الفاسدة بالرمزX والتي تتحقق بتحقق إحدى المجموعات السابقة، و المطلوب هو إيجاد:

إحتمال أن تكون هذه الوحدة الفاسدة من إنتاج الألة C،و بتطبيق نظرية بايز نجد:

$$P(C/X)=\frac{P(C)\times P(X/C)}{P(A)\times P(X/A)+P(B)\times P(X/B)+P(C)\times P(X/C)}$$

بالتطبيق العددي نجد:

$$P(C/X)=\frac{0.10\text{x}0.04}{(0.6\text{x}0.02)+(0.30\text{x}0.03)+(0.10\text{x}0.04)}=0.16$$

2.1- المتغيرات العشوائية و التوزيعات الإحتمالية:

1.2.1- المتغيرات العشوائية:

➢ **مثـــــال:**

ترمى زهرة نرد مرتين على التوالي. ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل مجموع العددين الظاهرين، أي:

$X(a,b) = a+b$. المطلوب شكل التوزيع الإحتمالي المناسب، ثم مثله بيانيا.

➢ **الحـــــل:**

لنشكل فضاء العينة، أي كل الحالات الكلية الممكنة الناتجة عن هذه التجربة الإحتمالية:

Ω = {(1,1), (1.2),(1.3),(1.4), (1.5), (1.6), (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5), (2.6), (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), (4.6), (5.1), (5.2), (5.3), (5.4), (5.5), (5.6), (6.1), (6.2), (6.3), (6.4), (6.5), (6.6)}.

إن قيم X الموافقة للقانون $X (a,b) = a + b$ هي كما يلي:

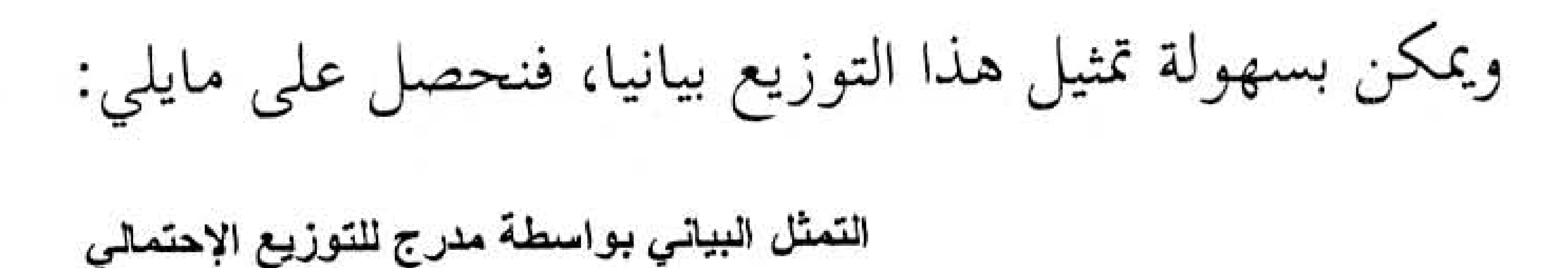
$$X = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

إن إحتمال أن يكون:

$$P(x = 2) = \frac{1}{36}$$

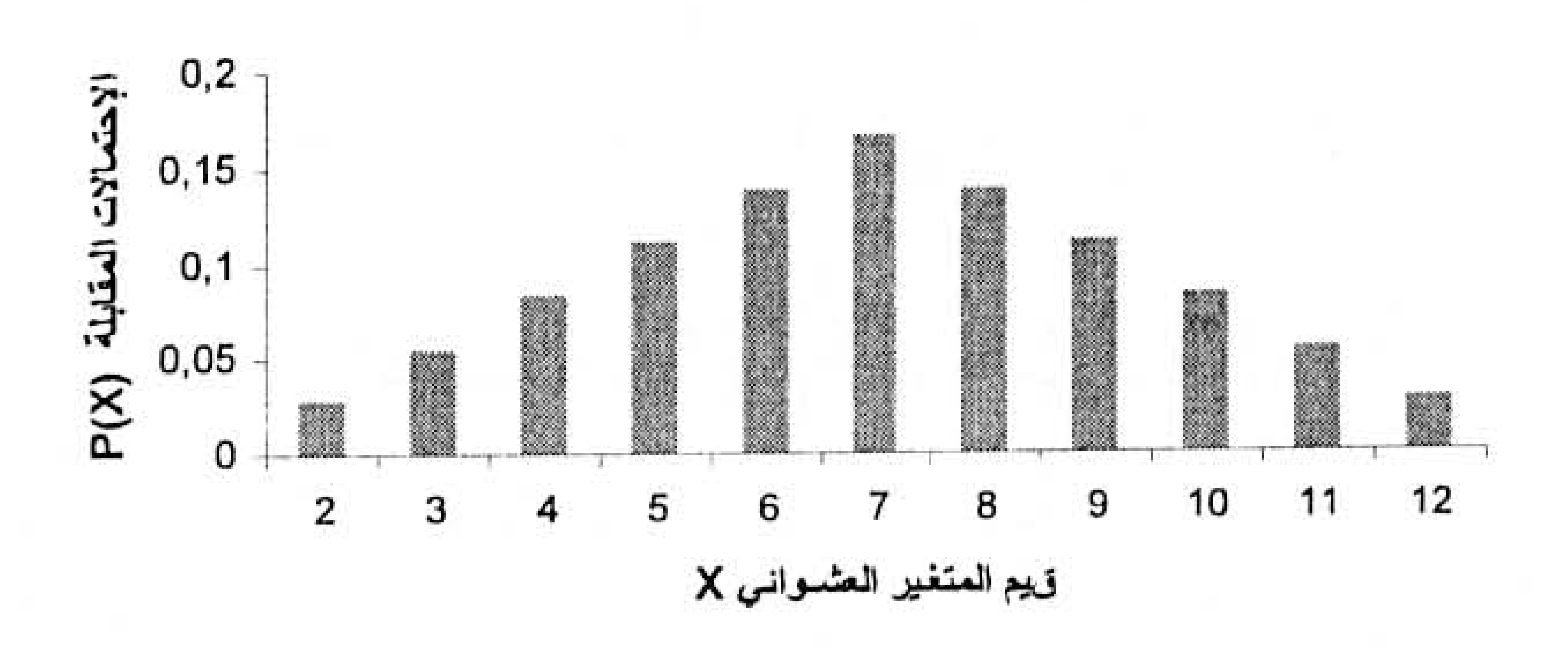
لأنه توجد حالة واحدة ممكنة يكون فيها مجموع العددين الظاهرين يساوي 2 وهي (1,1) من بين 36 حالة كلية. وبالمثل لباقي قيم X؛ فمثلا $P(x = 3) = \frac{2}{36}$ التي تقابل الحالتين (1.2) و(2.1)، و هكذا.....

قيم X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P (X)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36



ويمكن بسهولة تمثيل هذا التوزيع بيانيا، فنحصل على مايلي:

التمثل البياني بواسطة مدرج للتوزيع الإحتمالي



نلاحظ أن هذا التوزيع متماثل حول نقطة هي 7.

من هذا المثال البسيط يمكن أن نصل إلى تعريف المتغير العشوائي. إن المتغير العشوائيX هو مجموعة قيم لنتائج تجربة إحتمالية ما، مقترن بإحتمالات مقابلة، فلكل قيمة لــ Xi إحتمال مقابل P(Xi)، وهو ما يشكل توزيعا إحتماليا.

1.1.2.1- أنواع المتغيرات العشوائية:

و يمكن أن نميز: المتغير العشوائي المنفصل والمتغير العشوائي المتصل.

ا)- المتغير العشوائي المنفصل:

وهو المتغير العشوائي الذي يمكنه أخذ عددا منتهيا من القيم الصحيحة ضمن مجال تغيره، و يدعى في هذه الحالة بالمتغير العشوائي المنفصل ضمن فراغ عينة منته، مثل رمي حجر نرد مرة واحدة. أما المتغير العشوائي المنفصل ضمن فراغ عينة غير منته ولكنه قابل للعد، فهو العشوائي الذي يمكنه أخذ عددا غير منتهيا من القيم الصحيحة ضمن مجال تغيره ألا أن يكون هذا المجال قابلا للعد. مثال على ذلك عمليات السحب بالإعادة، حيث أن عدد مفردات السحب يبقى دائما ثابتا، وأن عملية سحب ما هي إلا متغير عشوائي مستقل عن العمليات الأخرى.

لنفرض أن X هو متغير عشوائي منفصل، و أن Ω هو فراغ عينته، فيكون لدينا:

$$\Omega = \{X1, X2, \ldots..Xn\}$$

وأن الإحتمالات المقابلة لقيم Xi هي P(X=Xi)، فإن التوزيع الاحتمالي يكون كما يلي:

قيم X	X1	X2	....	Xn
P (X)	$P(X_1)$	$P(X_1)$	....	$P(X_n)$

إن هذا التوزيع يجب أن يحقق شرطين أساسين:

$$\begin{cases} P(X_i) \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} P(X_i) = 1 \end{cases} \qquad (1.13)$$

➢ **مثـــــال:**

ترمى قطعة نقود مرتين على التوالي. نعرف المتغير العشوائي بأنه عدد مرات الحصول على الوجه F. و المطلوب شكل التوزيع الإحتمالي المناسب لهذه التربة الإحتمالية مع الرسم البياني.

➢ **الحـــــل:**

نرمز بـــ F للوجه الأول لقطعة النقود؛ وبالرمز P للوجه الأخر، فيكون فضاء العينة كما يلي:

$$\Omega = \{(F,F), (F.P),(P.F),(P.P)\}.$$

إن قيم X المقابلة هي كما يلي:

X = 0 عدم الحصول على الوجه F، أي الحصول على الوجه(P.P)

X = 1 الحصول على الوجه F مرة واحدة، أي (F.P),(P.F)

X = 2 الحصول على الوجه F مرتين، أي الحصول على الوجه,(F,F)

أي أن: $X = \{ 0, 1, 2,\}$

أما الإحتمالات المقابلة فهي:

$$P(x=2)=\frac{1}{4} \quad و \quad P(x=1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \quad و \quad P(x=0)=\frac{1}{4}$$

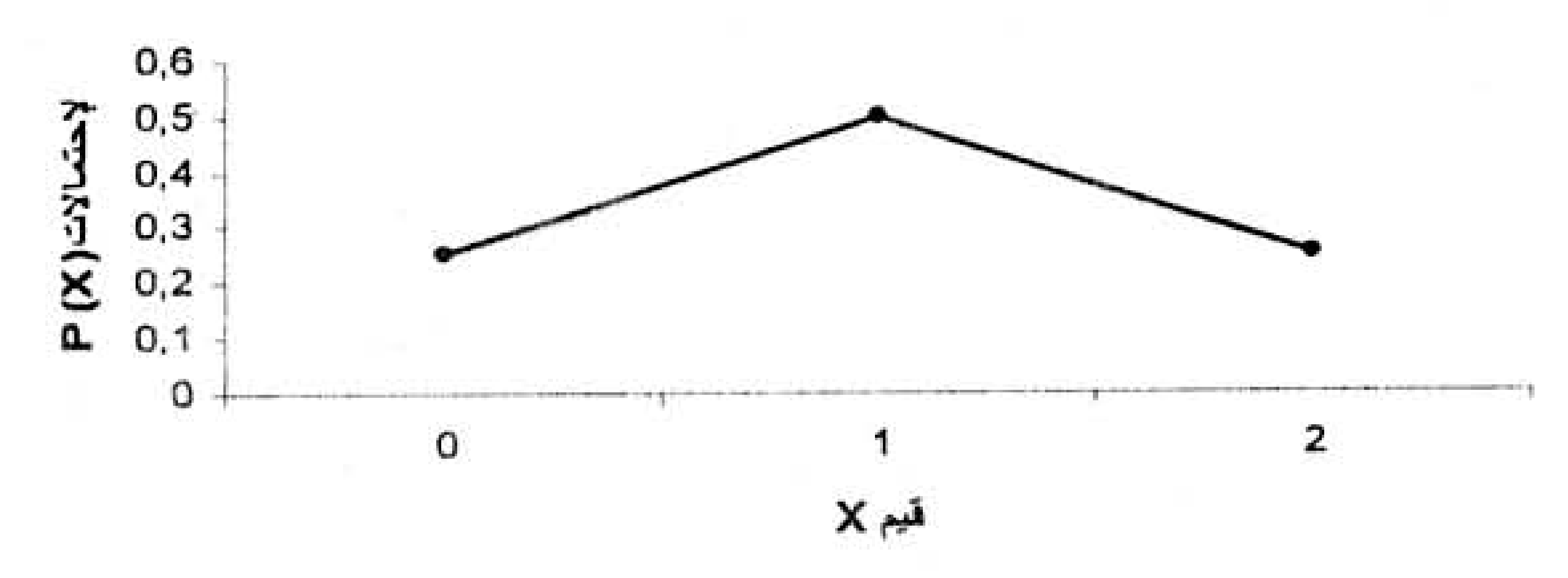
نلخص هذه النتائج في الجدول التالي:

قيم X	0	1	2	المجموع
P (X)	1/4	2/4	1/4	1

نلاحظ أن:

$$\begin{cases} P(X_i) \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} P(X_i) = 1 \end{cases}$$

أما التمثيل البياني لهذا التوزيع فهو كما يلي:



ب) المتغير لعشوائي المتصل:

كون X متغيرا عشوائيا متصلا، إذا كان بإمكان هذا المتغير أن يأحذ أية قيمة في مجال تغير X؛ إن إحتمال أن يأخذ X قيمة واحدة صحيحة يكون

معدوما في هذه الحالة (عكس المتغير العشوائي المنفصل). فمثلا أن طول شخص ما هو مغير عشوائي متصل، ذلك أن هذا الشخص يمكن أن يكون طوله 1.80، وبصورة أدق يمكن أن يكون 1.801 ويمكن أن يكون 1.8015 إذا إستعملنا وسائل قياس أدق وهكذا....، فاحتمال أن يكون طول هذا الشخص مساويا بالضبط 1.80 هو إحتمال معدوم.

إن قانون المتغير العشوائي المتصل يأخذ شكل الدالة المستمرة في مجال تعريفها، فتكون على الشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{دون ذلك} \end{cases}$$

وتسمى الدالة $f(x)$ بدالة الكثافة الإحتمالية، عندما تعبر عن احتمال قيمة معينة كما يلي $P(X = x)$ ونكتب أيضا: $f(x)$ وتسمى الدالة $f(x)$ دالة الكثافة الاحتمالية. ولكي يمكن اعتبار دالة ما، أيا كانت، دالة كثافة احتمالية يجب أن يتحقق شرطان اثنان:

$$1) \quad f(x) \geq 0$$

$$2) \quad \sum_x f(x) = 1$$

وذلك في حالة المتغيرات العشوائية المتقطعة.

أما في حالة المتغيرات العشوائية المستمرة فهي مجموعة القيم اللامتناهية، في مجال محدود، التي يمكن أن يأخذها المتغير X والاحتمالات الملحقة بها. ولكي تكون $f(x)$ دالة كثافة إحتمالية، يجب تحقق الشرطين:

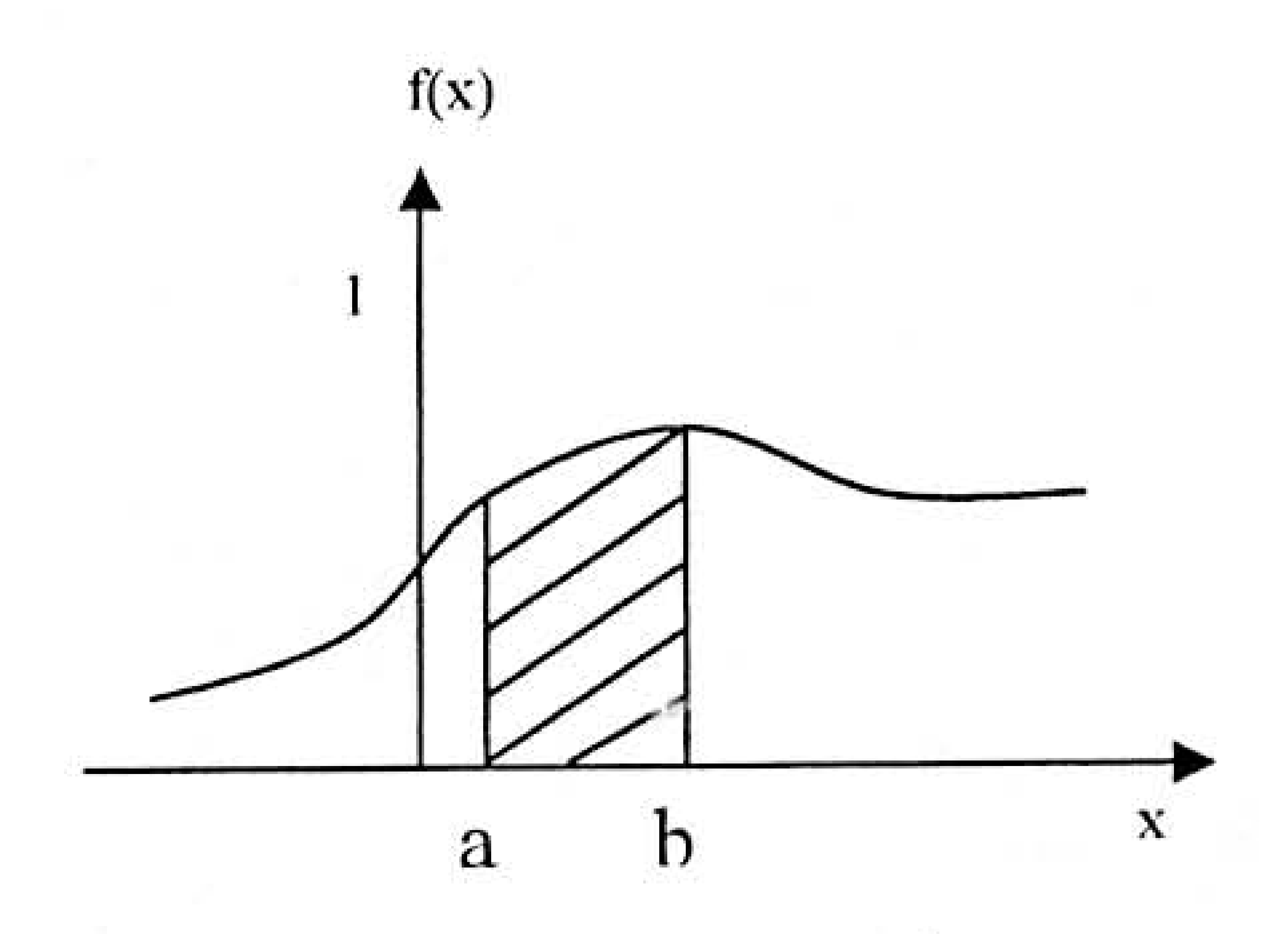
$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \int_b^a f(x)dx = 1 \end{cases} \qquad (1.14)$$

وهي ممثلة بمنحنى متصل.

لاحظ أنه بما أن X تأخذ عددا لا متناهيا من القيم داخل أي مجال، فإن احتمال قيمة بعينها يكون ذلك بحساب المساحة تحت منحنى f(x) بين حدود المجال.

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx \tag{1.15}$$

لاحظ أن إشارة التكامل هنا تقابل إشارة المجموع في حالة المتغير العشوائي المتقطع.



التمثيل البياني لدالة الكثافة للمتغيرة العشوائية المستمرة

➢ **مثال لحالة المتغيرات العشوائية المتقطعة**

نأخذ دالة الكثافة ل X نتيجة لإلقاء حجر نرد:

$f(1) = f(2) = f(3) = \dots f(6) = 1/6 \geq 0$,   الشـــرط الأول محقـــق

والشرط الثاني أيضا لأن:

$$\Sigma f(x) = 1/6 + 1/6 + \dots + 1/6 = 6(1/6) = 1$$

➢ **مثال لحالة المتغيرات العشوائية المستمرة**

ليكن X متغيرا عشوائيا متصلا معرفا بالدالة الإحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} KX & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{دون ذلك} \end{cases}$$

- أوجد قيمة K حتى تكون f(x) دالة كثافة إحتمالية،
- أوجد $P(1 \leq x \leq 2)$،
- مثل بيانيا هذه الدالة.

➢ **الحـــــــل:**

حتى تكون f (x) دالة كثافة إحتمالية يجب أن يكون:

$$\int_1^3 f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_1^3 kxdx = 1 \Rightarrow k\int_1^3 xdx = 1$$

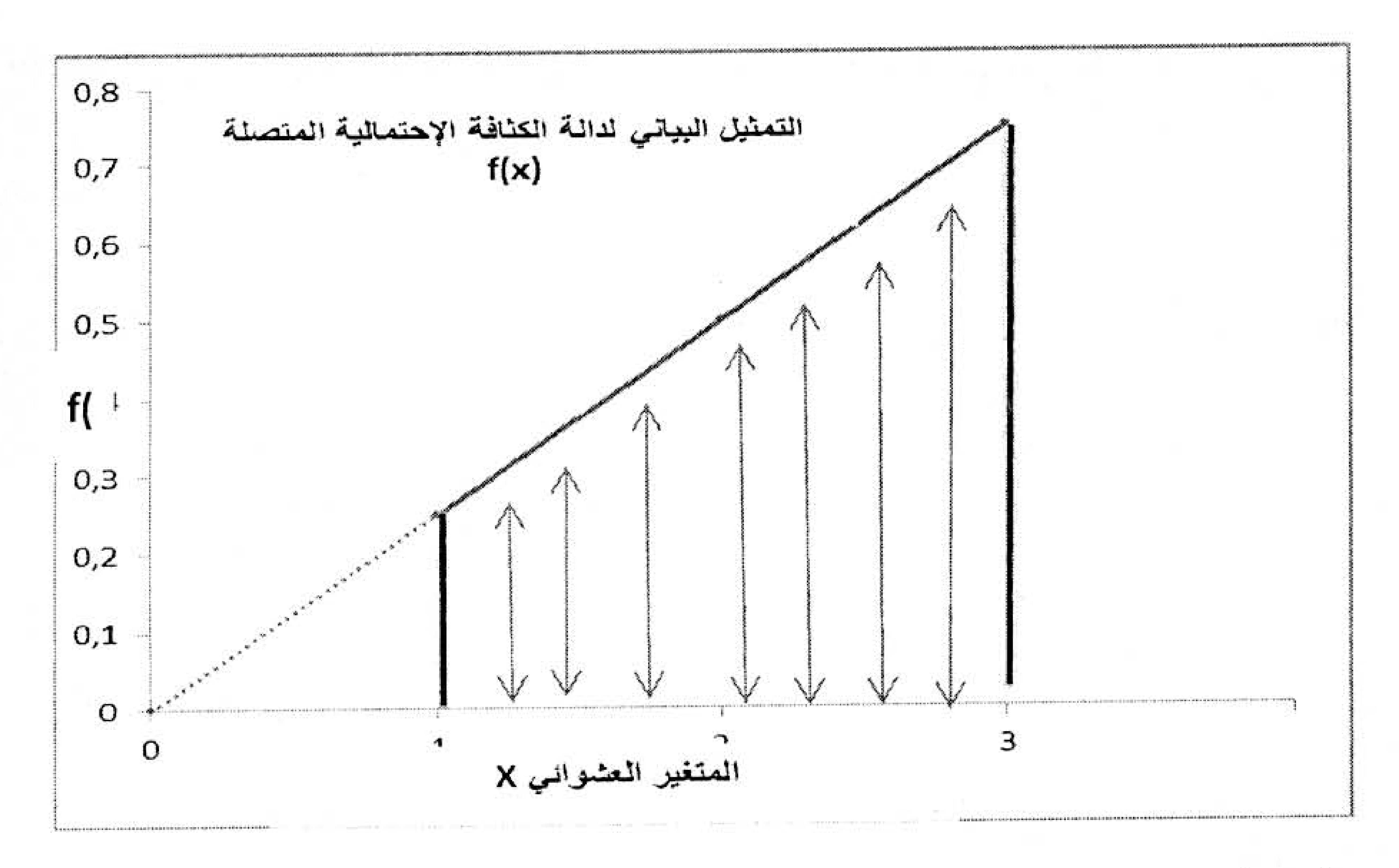
$$k\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = k\left[\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right] = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{4}$$

وتكون الدالة على النحو التالي:

$$f(x) = \begin{cases} 1/4X & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{دون ذلك} \end{cases}$$

ويمكن بسهولة إيجاد:

$$P(1 \leq x \leq 2) = \int_1^2 \frac{1}{4}xdx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right] = \frac{3}{8} = 0.375$$



ملاحظة هامة:

يمكن إيجاد $P(1 \leq X \leq 2)$ هندسيا وذلك بحساب مساحة شبه المنحرف وفق العلاقة: $\frac{AxB}{2} xh$

أي أن: $P(1 \leq x \leq 2 = \frac{0.5+0.25}{2} x1 = 0.375$

- **دالة التوزيع F(x) للمتغيرة العشوائية المتقطعة**

تعرف دالة التوزيع – وتسمى أيضا "الدالة التجميعية" — كما يلي:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

ويمكن استنتاج دالة التوزيع من دالة الكثافة الاحتمالية f(X) كما يلي:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{u \leq x} f(u)$$

إذا كانت X تأخذ عددا منتهيا من القيم فإن F(x) يمكن تعريفها كما يلي:

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \quad -\infty < x < x_1 \\ f(x_1) & , \quad x_1 \le x < x_2 \\ f(x_1)+f(x_2) & , \quad x_2 \le x < x_3 \\ \ldots & \\ f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n), & \quad x_n \le x < +\infty \end{cases}$$

➢ **تمــــرين**

في تجربة رمي قطعة نقدية مرتين نعتبر المتغير العشوائي X التي تمثل عدد مرات الحصول على كتابة. إن القيم الممكنة ل X هي 0، 1، 2. في نفس التجربة نعرف المتغير العشوائي Y الذي يمثل عدد مرات الحصول على صورة، فتكون القيم الممكنة 0، 1، 2، ونعرف المتغير Z بحث Z = X - Y فتكون القيم الممكنة له هي 0، 2، -2. الاحتمالات الملحقة بقيمها يمكن حسابها كما يلي:

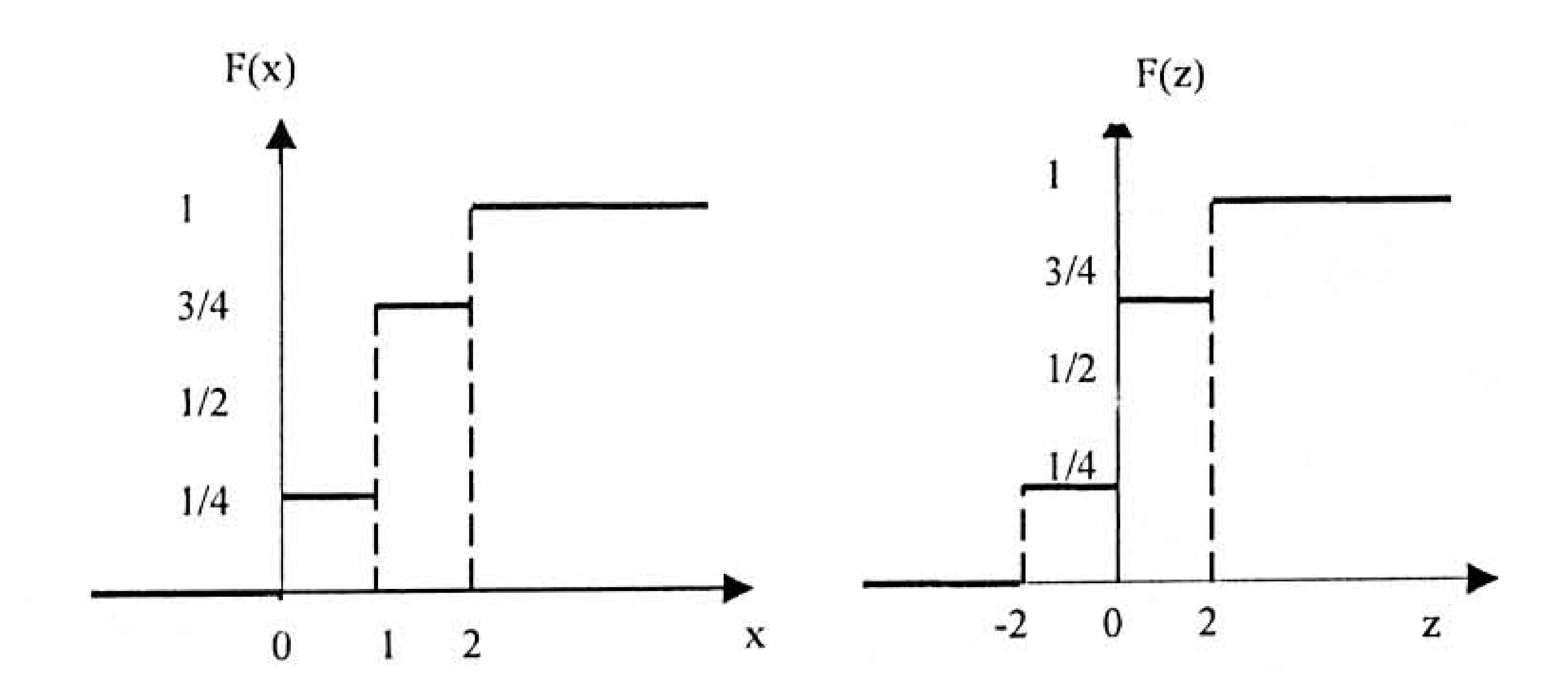
P(Z = 0) = P(X – Y = 0) = P(X = 0 et Y = 0 ou X = 1 et Y = 1 ou X = 2 et Y = 2) =>P (Z = 0) = 0 + P(X = 1 et Y = 1) + 0 = 2 * 0.5² = **0.5**

ويمكن إيجاد قيم F(x) وF(z) للمتغيرين X و Z كما في الجدولين:

X	0	1	2
f(x)	1/4	1/2	1/4
F(x)=P(X≤x)	1/4	3/4	1

Z	-2	0	2
f(x)	1/4	1/2	1/4
F(x)=P(X≤x)	1/4	3/4	1

التمثيل البياني لدالة التوزيع للمتغيرة العشوائية



- **دالة التوزيع F(x) للمتغير العشوائي المستمر**

تعرف دالة التوزيع للمتغير المستمر كما يلي:

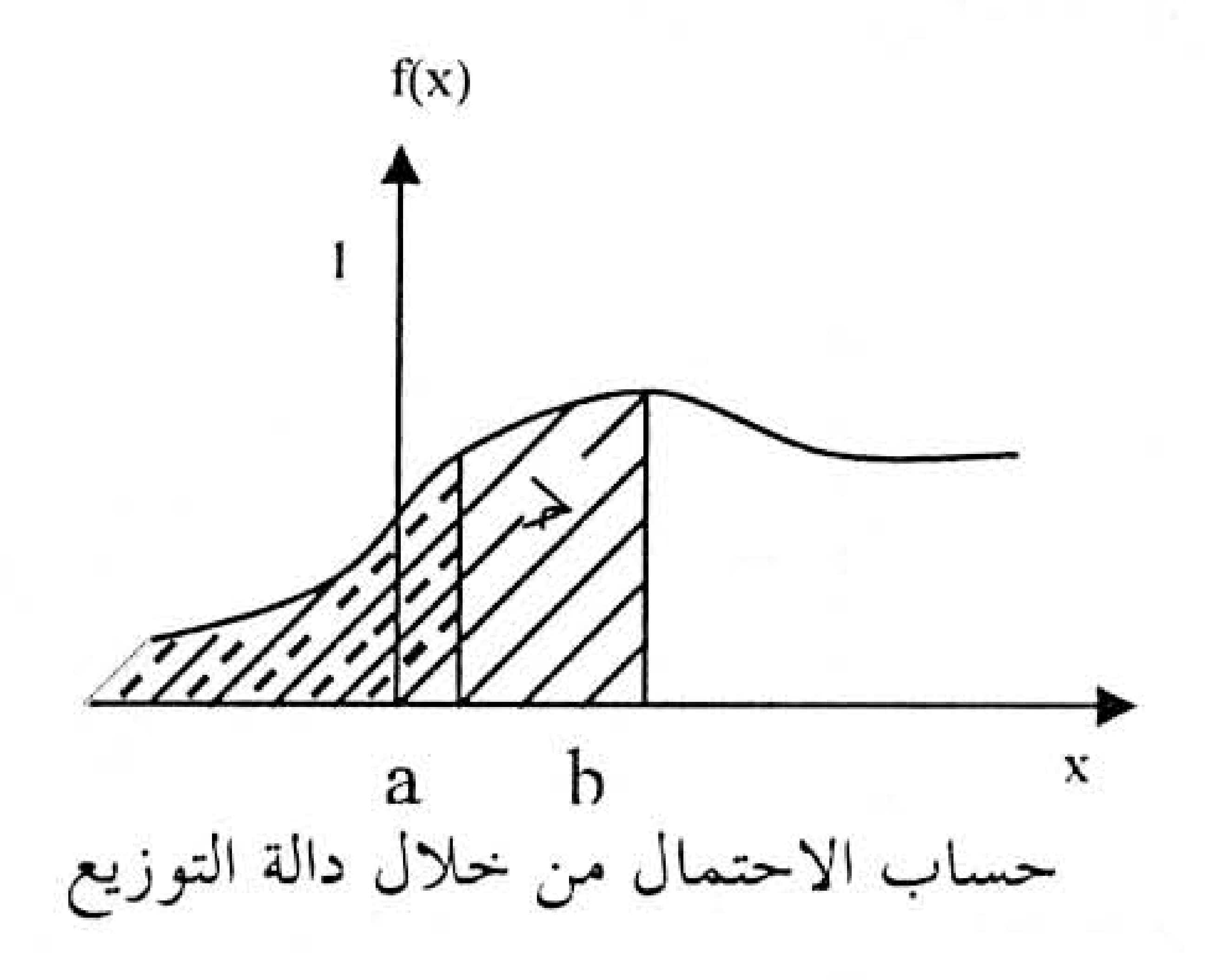
تسمى F(X) دالة التوزيع للمتغير المستمر X إذا كان:

(1.16)

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

ولحساب احتمال جال من الجهة اليسرى، فإننا نقوم بالتعويض في دالة التوزيع بدلا من حساب التكامل وفق القاعدة التالية: بفرض a, b نقطتان من مجال تعريف X، بحيث a < b. لحساب احتمال أن تكون X تنتمي إلى المجال]a, b] :

$$P(a < x \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$



حساب الاحتمال من خلال دالة التوزيع

➢ **مثـــــال:**

أوجد قيمة الثابت C التي تحقق الشرطين الأول والثـــاني لدالـــة الكثافـــة الاحتمالية في الدالة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{دون ذلك} \end{cases}$$

✓ أحسب احتمال أن تكون X تنتمي للمجال من 1 إلى 2.

✓ أحسب احتمال أن تكون X لا تنتمي للمجال من 1 إلى 2.

✓ استخدم دالة التوزيع لحساب الاحتمال: $P(1< x <2)$.

الحـــــــل:

- إيجاد قيمة الثابت C

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{3} Cx^2dx + \int_{3}^{+\infty} 0dx = 1 \Rightarrow C\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9C = 1 \Rightarrow C = 1/9$$

حتى تكون f(x) دالة كثافة يجب أن يكون $C = 1/9$.

➢ احتمال أن تكون x تنتمي للمجال من 1 إلى 2.

$$P(1 < x \leq 2) = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (1/9)x^2 dx = \frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{9}\left[\frac{8-1}{3}\right] = \frac{7}{27}$$

➢ احتمال أن تكون x لا تنتمي للمجال من 1 إلى 2

$$P(1 > x > 2) = 1 - P(1 < x < 2) = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27}$$

➢ **دالة التوزيع:**

$$*\, x < 0: \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0du = 0$$

$$*\, x \geq 3: \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_{0}^{3} \frac{1}{9}u^2du + \int_{3}^{x} 0du = 0 + \frac{1}{9}\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^3 + 0 = \frac{27}{27} = 1$$

$$*\, 0 \leq x < 3: \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_{0}^{x} \frac{1}{9}u^2du = \frac{1}{9}\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{27}$$

فتكون الصيغة النهائية لدالة التوزيع:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^3/27 & 0 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

➢ حساب الاحتمال: $P(1 < x < 2)$ باستعمال دالة التوزيع:

$$P(1 < x \leq 2) = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{27} - \frac{1^3}{27} = \frac{7}{27}$$

3.1– التوقع الرياضي:

إن التوقع الرياضي (الأمل الرياضي) لأي توزيع إحتمالي معين هو عبارة عن متوسط حسابي لهذا التوزيع، و يرمز له بالرمز: E(X).

أ) – حالة التوزيع الإحتمالي المنفصل:

ويعطى بالعلاقة التالية:

$E(X)=\frac{\sum Xp(X)}{\sum P(X)}$ و حيث أن: $\sum P(X)=1$ ، فإن:

$$E(X)=\sum XP(X) \qquad (1.17)$$

➢ مثـــــال:

تنتج شركة معينة 20 قطعة في اليوم من منتوج معين، من بينهما قطعتان فاسدتان. قمنا بسحب 4 قطع من هذا المنتوج بطريقة عشوائية. أوجد القيمة المتوقعة لعدد القطع الفاسدة.

➢ الحـــــل:

إن قيم X الممكنة هي: $X=\{0,1,2\}$ ، أي لا توجد قطعة فاسدة أو توجد قطعة فاسدة واحدة أو توجد قطعتان فاسدتان.

إن عدد الحالات الكلية هو: $C_{20}^{4}=4845$؛ أما الإحتمالات المقابلة لـــ X فهي:

$$P(X=0)=\frac{C_2^0 C_{18}^4}{C_{20}^4}=0.63$$

$$P(X=1)=\frac{C_2^1 C_{18}^3}{C_{20}^4}=0.33$$

$$P(X=2)=\frac{C_2^2 C_{18}^2}{C_{20}^4}=0.031$$

نتحصل على التوزيع التالي:

قيم X	0	1	2	المجموع
P (X)	0.63	0.33	0.031	1
XP(X)	0	0.33	0.062	0.392 = 0.4

وعليه فإن التوقع الرياضي لهذه العملية هي 0.4، أي أننا نتوقع الحصول على 0.4 قطعة فاسدة (قيمة لـــ X) من بين 20 قطعة المنتجة.

ب) – حالة التوزيع الإحتمالي المتصل:

تعطى عبارة التوقع الرياضي بالعلاقة التالية:

$$E(x) = \int_{R} xf(x)dx \qquad (1.18)$$

➢ **مثـــــال**

يمكننا بسهولة إيجاد الأمل الرياضي للتوزيع الإحتمالي المتصل الوارد في المثال السابق وهو:

$$f(x) = \begin{cases} 1/4X & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{دون ذلك} \end{cases}$$

➢ **الحـــــل:**

$$E(x) = \int_{R} xf(x)dx = \int_{1}^{3} \frac{1}{4} x^2 dx = \frac{1}{4} \int_{1}^{3} x^2 dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{27}{3} - \frac{1}{3}\right] = \frac{26}{12} = 2.16$$

ج)- خواص التوقع الرياضي:

- إذا كان X متغيرا عشوائيا غير سالب فإن: $E(X) \geq 0$،
- $E(C) = C$، حيث $C \in R$،
- $E(C.X) = C\,E(X)$،
- $E(X.Y) = E(X).E(Y)$، إذا كانت المتغيران X و Y مستقلتان
- إذا كان X وY متغيـــران عشوائيـــان معرفين على نفس فضاء العينة، فإن: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

➢ **مثـــــال:**

يمكن لأحدى الشركات التجارية أن تربح 300.000 دولار باحتمال قدره 0.60، كما يمكنها أن تخسر 100.000 دولار باحتمال قدره 0.40. المطلوب: كم تتوقع الشركة أن تربح في المتوسط؟.

➢ **الحـــــل:**

نلاحظ وجود متغيرين هما الربح X و الخسارة Y، و لكل منهما إحتماله المعلوم. إن التوقع المشتركة لهذه العملية هي:

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 300.000 \times 0.60 + (-100.000 \times 0.40) = 140.000\ \$$$

أي أن الشركة تتوقع أن تربح 140.000 دولار (لاحظ إشارة السالب التي تعني الخسارة).

4.1- التباين:

أ) – حالة التوزيع الإحتمالي المنفصل:

ويعطى بالعلاقة التالية:

$$Var(X) = \sum (X - E(X))^2 . P(X) \qquad (1.19)$$

وبعبارة أخرى، يمكن أن نكتب:

$$Var(X) = \sum x^2 . P(x) - [E(x)]^2$$

ب) – حالة التوزيع الإحتمالي المتصل:

$$Var(X) = \int_{\mathbb{R}} (X - E(X))^2 f(x)dx \qquad (1.20)$$

أو نكتب:

$$Var(X) = \int_{\mathbb{R}} x^2.P(x).dx - [E(x)]^2$$

➢ **تمـــــرين:**

يصوب رامي على هدف 03 طلقات، فإذا كان إحتمال إصابة الهدف هو0.40. نعرف X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد إصابات الهدف. المطلوب إيجاد التوقع الرياضي و التباين لهذه التجربة الإحتمالية.

➢ **الحـــــل:**

إن قيم X الممكنة هي:

$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$

أما الإحتمالات الممكنة فهي كما يلي:

$P(X = 0)= 0.6x0.6x0.6 = 0.216$
$P(X = 1)= 0.6x0.6x0.4 = 0.432$
$P(X = 2)= 0.6x0.4x0.4 = 0.288$
$P(X = 3)= 0.4x0.4x0.4 = 0.064$

نلخص هذا في الجدول التالي:

قيم X	0	1	2	3	المجموع
P (X)	0.216	0.432	0.288	0.064	1

التوقع الرياضي:

$$E(X) = \sum XP(X) = 0x0.216 + 1x0.432 + 2x0.288 + 3x0.064 = 1.2$$

التباين:

$$Var(X)=\sum(X-E(X))^2.P(X)=[\ (0-1.2)^2x0.216+ (1-1.2)^2x0.432+(2-1.2)^2x0.288+(3-1.2)^2x0.064\ ]=0.72$$

5.1-التوزيعات الإحتمالية الشهيرة:

هناك العديد من التوزيعات الاحتمالية التي تخضع إلى قوانين معينة ثابتة، نسبت في الغالب إلى واضعيها كتوزيع ذو الحدين الذي ينسب إلى العالم برنولي؛ ولكل هذه التوزيعات إستعمالاتها خاصة عند إجراء التجارب العلمية، إذ تستعمل في إختبار نجاح هذه التجارب، كما تساعد في إتخاذ القرار. نكتفي بدراسة بعض التوزيعات الشهيرة المستعملة أساسا في المجال الاقتصادي وكذلك تلك التي تستعمل في تجارب العلوم الطبيعية، وهي:

1.5.1- توزيع ذو الحدين:

وهو أحد التوزيعات الإحتمالية المنفصلة؛ فإذا كان لدينا في تجربة إحتمالية مستقلة ناتجين، نفرض أن P هي إحتمالات النجاح، فيكون q هي إحتمالات الفشل بحيث: $p + q = 1$. إن إحتمال أن وقوع X من النجاحات في n من المحاولات المتكررة هو:

$$P(X=x)=C_n^x p^x q^{n-x}=\frac{n!}{(n-x)!\,x!}p^x q^{n-x} \qquad (1.21)$$

ونرمز لهذا الإقتران الإحتمالي بالرمز: b (x,n,p)

➢ مثـــــال:

ترمى قطعة نقود 6 مرات. أوجد إحتمال الحصول على:

- الوجه F مرتين بالضبط
- الحصول 4 مرات على الوجه F على الأقل
- عدم الحصول على الوجه F.

➢ الحـــــل:

لدينا في قطعة النقود: $p = q = 0.5$، فإذا كانت $n = 6$ فإن:

- إحتمال الحصول على الوجه F مرتين بالضبط:

$$P(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x} \Rightarrow P(X = 2) = C_6^2 0.5^2 0.5^{6-2} = 0.234$$

- الحصول 4 مرات على الوجه F على الأقل:

$$P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$$
$$= C_6^4 .0.5^4 .0.5^{6-4} + C_6^5 0.5^5 .0.5^{6-5} + C_6^6 0.5^6 .0.5^{6-6} = 0.343$$

- عدم الحصول على الوجه F.

$$P(X = 0) = C_6^0 0.5^0 0.5^6 = 0.5^6 = 0.0156$$

1.1.5.1– خواص توزيع ذو الحدين:

- **التوقع الرياضي:**

$$\mu = np \qquad (1.22)$$

- **التباين:**

$$\sigma^2 = npq \qquad (1.23)$$

- **الإنحراف المعياري:**

$$\sigma = \sqrt{npq} \qquad (1.24)$$

➢ **تمـــــرين:**

ألقي حجر نرد 180 مرة. ما هو توقع عدد مرات الحصول على الرقم 6 و ما هو الإنحراف المعياري عندئذ؟.

➢ الحـــــل:

$$\mu = np = 180x1/6=30$$

أي أننا نتوقع 30 مرة الحصول على الرقم 6، بإنحراف معياري:

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{180x1/6x5/6} = 5$$

2.5.1- توزيع بواسون:

وهو أحد التوزيعات الإحتمالية المنفصلة، وهو توزيع لا نهائي قابل للعد، له إستعمالات في الظواهر المتعلقة بالزمن، مثل حساب إحتمالات عدد

السيارات التي تمر خلال دقيقة في منطقة ما؛ أو حساب عدد الجسيمات أشعة ألفا التي يطلقها مركب مشع خلال وحدة زمنية...

ولإيجاد إحتمالات المتغير العشوائي X المقابلة لهذا التوزيع، فإننا نستخدم العلاقة التالية:

$$P(X=x)=\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{x!} \qquad (1.25), \qquad x=0, 1, 2, \ldots\ldots$$

حيث أن λ ثابت أكبر من الصفر يمثل متوسط عدد الأحداث؛ e أساس اللوغارتم النيبري و يساوي 2.71.

1.2.5.1- خواص توزيع بواسون:

- **التوقع الرياضي:**

$$\mu=\lambda \qquad (1.26)$$

- **التباين:**

$$\sigma^2=\lambda \qquad (1.27)$$

- **الإنحراف المعياري:**

$$\sigma=\sqrt{\lambda} \qquad (1.28)$$

➢ **مثـــــال:**

يتلقى قسم الشرطة متوسط 5 مكالمات في الساعة. أوجد إحتمال تلقي مكالمتين في ساعة مختارة عشوائيا.

➢ **الحـــــل:**

$$P(X=x)=\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{x!}=\frac{5^{2}e^{-5}}{2!}=0.08$$

2.2.5.1- تقريب توزيع ذو الحدين من توزيع بواسون:

في كثير من الحالات تكون قيمة n كبيرة جدا في توزيع ذو الحدين، وتكون قيمة p (إحتمالات النجاح) صغيرة جدا؛ فيصبح صعبا إجراء الحسابات

(مثلا حســـاب n !). يمكننا إجراء تقريب ذو الحديـــن لتوزيع بواســـون بحيث أن: $\lambda = np$.

➢ مثـــــال:

لنفترض أن $n = 100$ و $p = 0.01$، فيكون $\lambda = np = 1$. نتحصل على الجدول المقارن التالي:

x	0	1	2	3	4	5
إحتمالات ذو الحدين	0.366	0.370	0.185	0.0610	0.0149	0.0029
إحتمالات بواسون	0.368	0.368	0.184	0.0613	0.0153	0.00307

يظهر جليا بعد مقارنة إحتمالات التوزيعين، مدى التقارب الشديد بينهما.

➢ مثـــــال 2:

يحتوي كتاب على 500 صفحة، بفرض أن هناك 300 خطأ مطبعيا، فأوجد إحتمال أن تحتوي صفحة معينة على:

ا) – خطأين بالضبط،   ب)- خطأين أو أكثر

➢ الحـــــل:

إن هذه التجربة الإحتمالية تتبع توزيع ذو الحدين مع: $n = 300$ = p 1/500 وحيث أن قيمة n كبيرة و p صغيرة، فإننا نستخدم توزيع بواسون كتقريب لذو الحدين مع $\lambda = np = 0.6$.

أ) – إحتمال الحصول على خطأين بالضبط:

$$P(X = 2) = \frac{0{,}6^2 e^{-0{,}6}}{2!} = 0.098$$

ب) – إحتمال الحصول على خطأين أو أكثر: يعني صفر خطأ أو خطأ واحد أو خطأين:

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\frac{0,6^0 e^{-0,6}}{0!}+\frac{0,6^1 e^{-0,6}}{1!}+\frac{0,6^2 e^{-0,6}}{2!}$$

$$=0.549+0.329+0.098=0.976$$

3.5.1- التوزيع الطبيعي:

أحد و أهم التوزيعات الإحتمالية المتصلة، نظرا لإستعمالاته المتعددة في شتى الميادين. تعطى دالة كثافته الإحتمالية بالعلاقة التالية:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2} \quad (1.29)$$

حيث: μ و$0 < \sigma$ هما ثابتان. إن منحنى هذه الدالة يأخذ الشكل الجرسي، متماثل حول نقطة مركزية هي μ، بحيث أن المساحة تحت المنحني تساوي 1. نرمز للتوزيع الطبيعي الذي وسطه μ و تباينه σ^2 بـــ $N(\mu,\sigma^2)$.

1.3.5.1– خواص التوزيع الطبيعي:

- التوقع الرياضي: μ
- التباين: σ^2
- الإنحراف المعياري: σ

2.3.5.1- التوزيع الطبيعي القياسي:

إن حساب إحتمال $P\ (x1<X<x2)$ يتطلب حساب التكامل المحدود للدالة المعطاة في (1.29). إن حساب هذا التكامل يتطلب الكثير من الحسابات؛ ولذلك ظهر التوزيع الطبيعي القياسي الذي يعتمد في حساب هذا التكامل على إستعمال جدول خاص يمكن من حساب أي مساحة من خلال قراءة مباشرة في الجدول دون اللجوء إلى حساب هذا التكامل. ويمكن الإنتقال من التوزيع

الطبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ إلى التوزيع الطبيعي القياسي الذي وسطه 0 و تباينه 1 أي $N(0.1)$ بالعلاقة التالية :

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \qquad (1.30)$$

عندئذ تصبح الدالة f(x) كما يلي:

$$\Psi(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} \qquad (1.31)$$

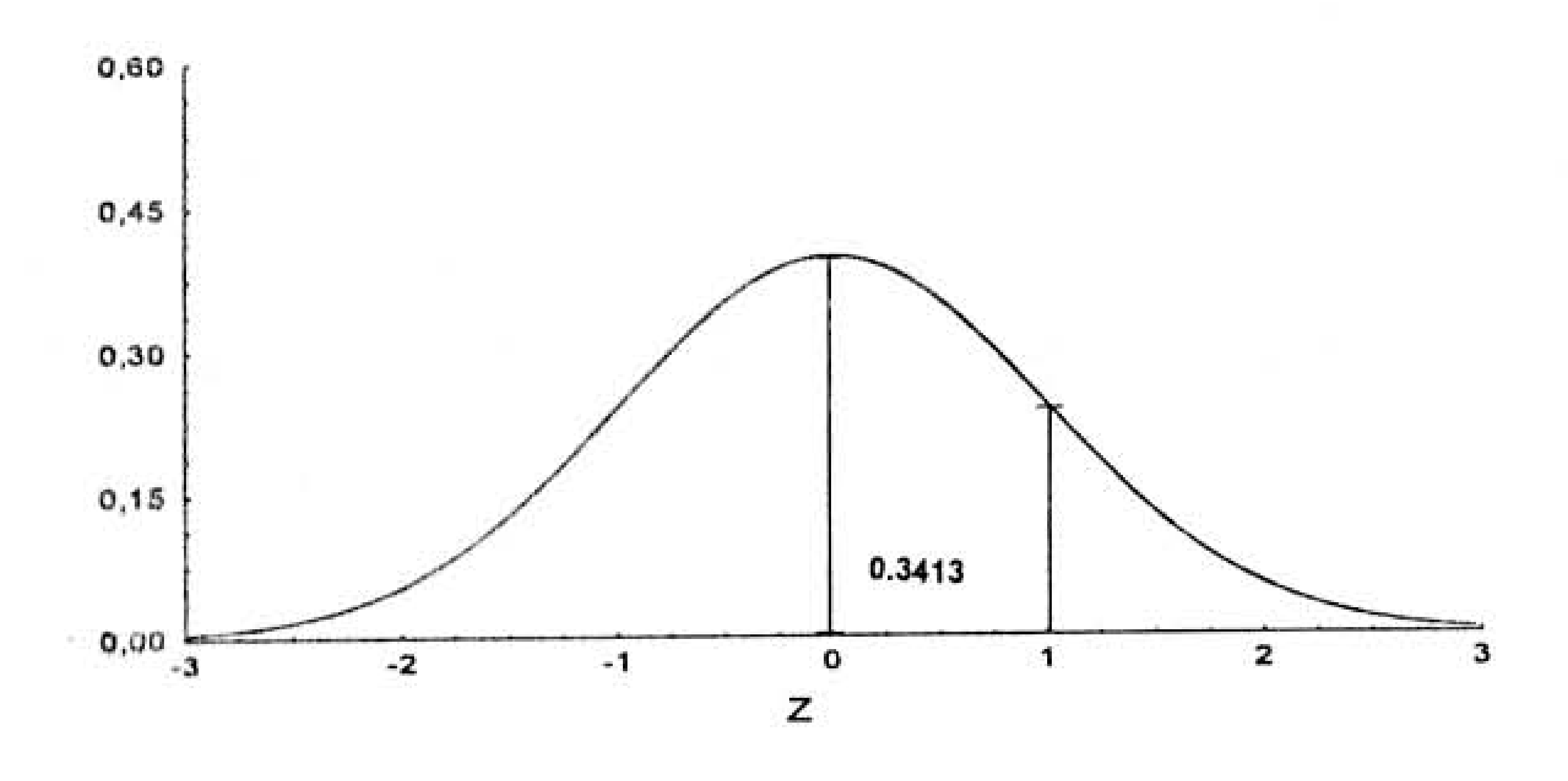
يعطينا جدول التوزيع الطبيعي القياسي (أنظر الملحق، جدول 3) المساحة الواقعة تحت المنحنى بين Z = 0 وأي قيمة موجبة أخرى Z، كما يمكننا الإستفادة من خاصية التماثل (التناظر) في هذا التوزيع من تحويل وحدات Z السالبة إلى وحدات موجبة.

➢ **مثال1:**

-أحسب إحتمال $P(0<Z<1)$:

إن هذا الإحتمال يقابل المساحة المحصورة بين 0 و 1.00 في الجدول 3. نأخذ العمود من أعلى إلى أسفل و نتوقف عند القيمة 1.0، الرقم الثاني وراء الفاصل يقرأ في سطر الجدول عند 0 فنجد المساحة: 0.3413 عند إلتقاء القراءتين.

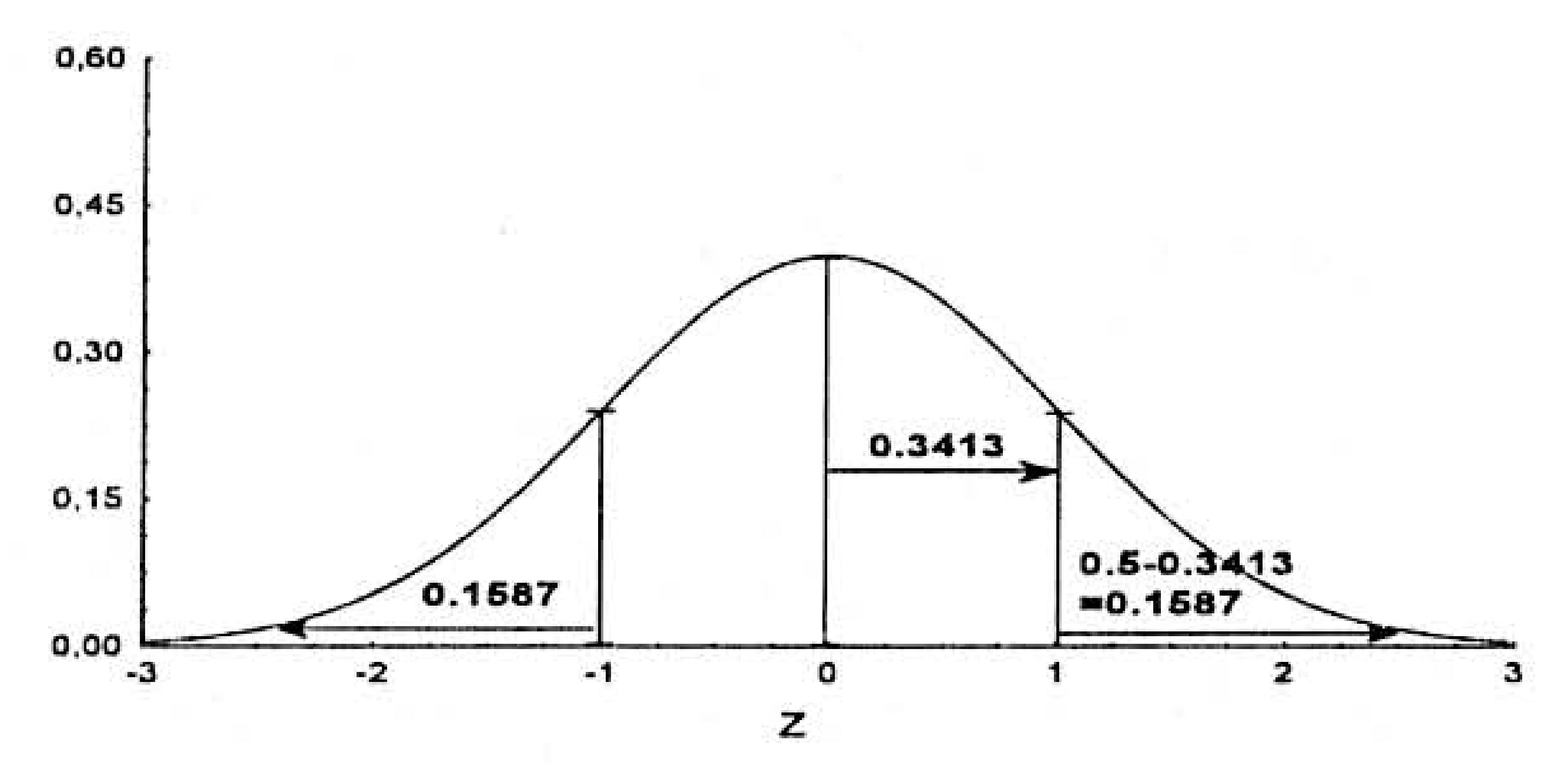
$$P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$$



مثــــال2:

أحسب إحتمال $P(Z \geq 1)$:

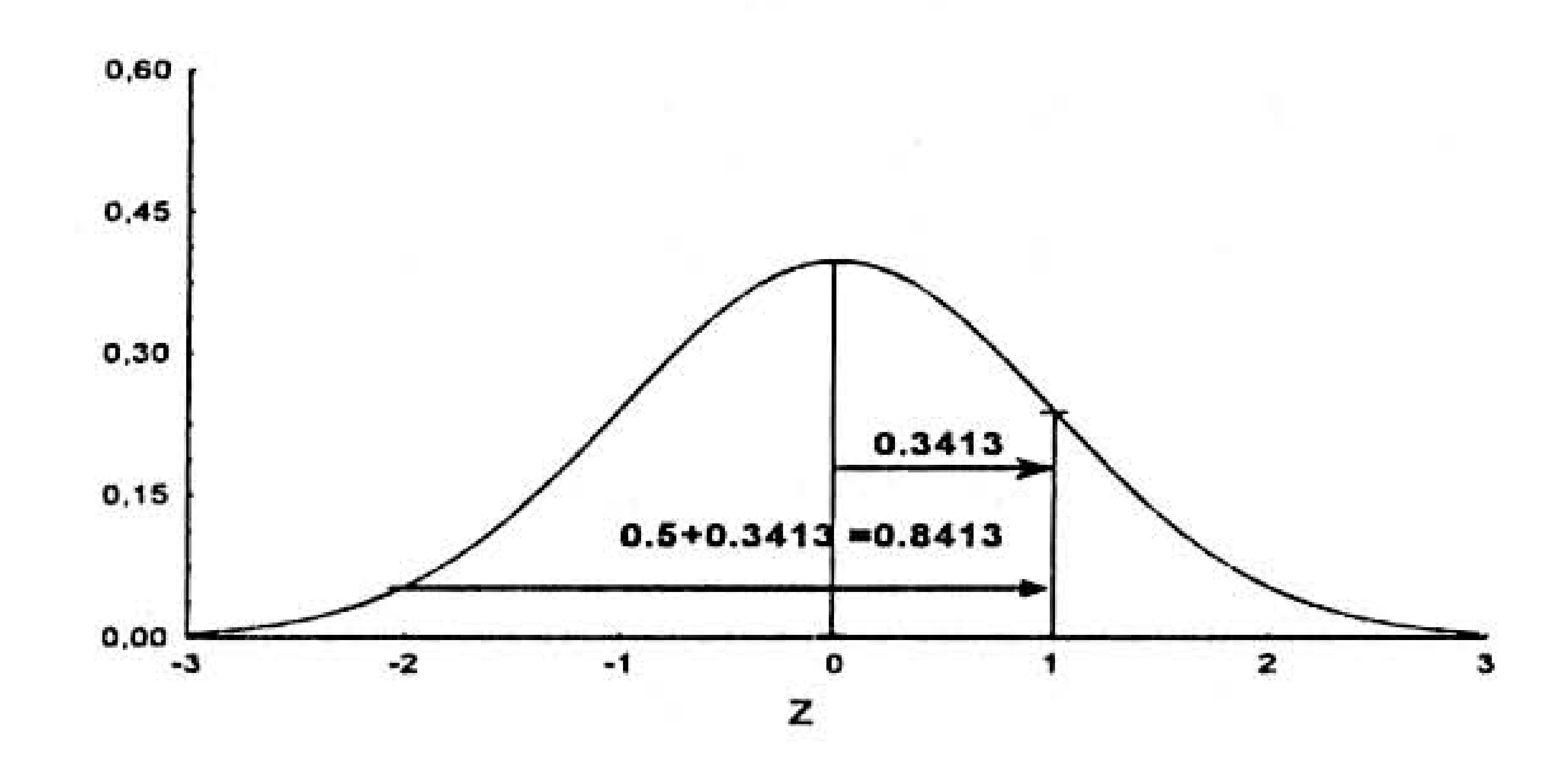
$$P(Z \geq 1) = 0.5 - (0 \leq Z \leq 1) = 0.5 - 0.3413 = 0.1587$$



- **مثــــال 3:**

أحسب إحتمال $P(Z \leq 1)$:

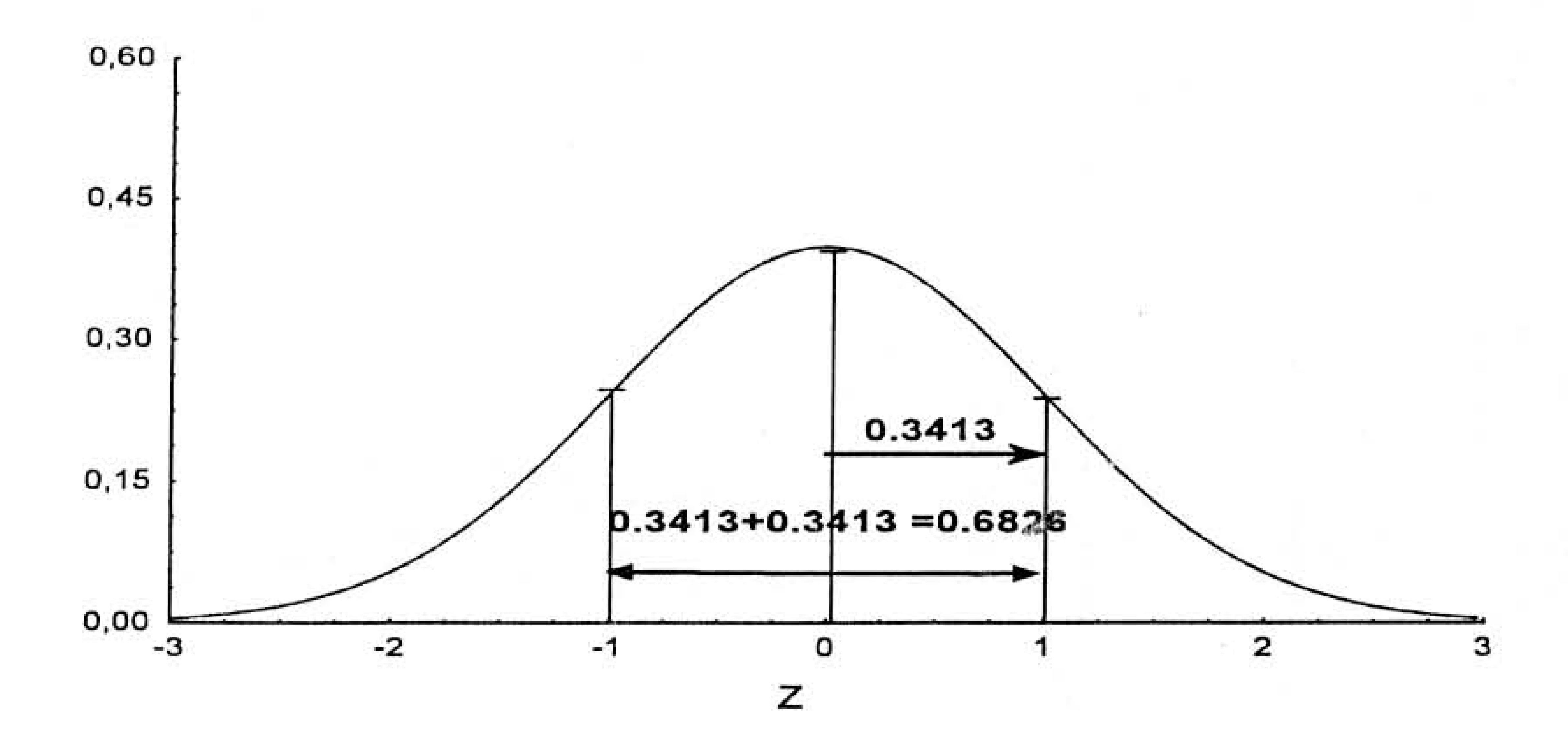
$$P(Z \leq 1) = 0.5 + P(0 \leq Z \leq 1) = 0.5 + 0.3413 = 0.8413$$



مثــــال 4:

أحسب إحتمال $P(-1 \leq Z \leq 1)$:

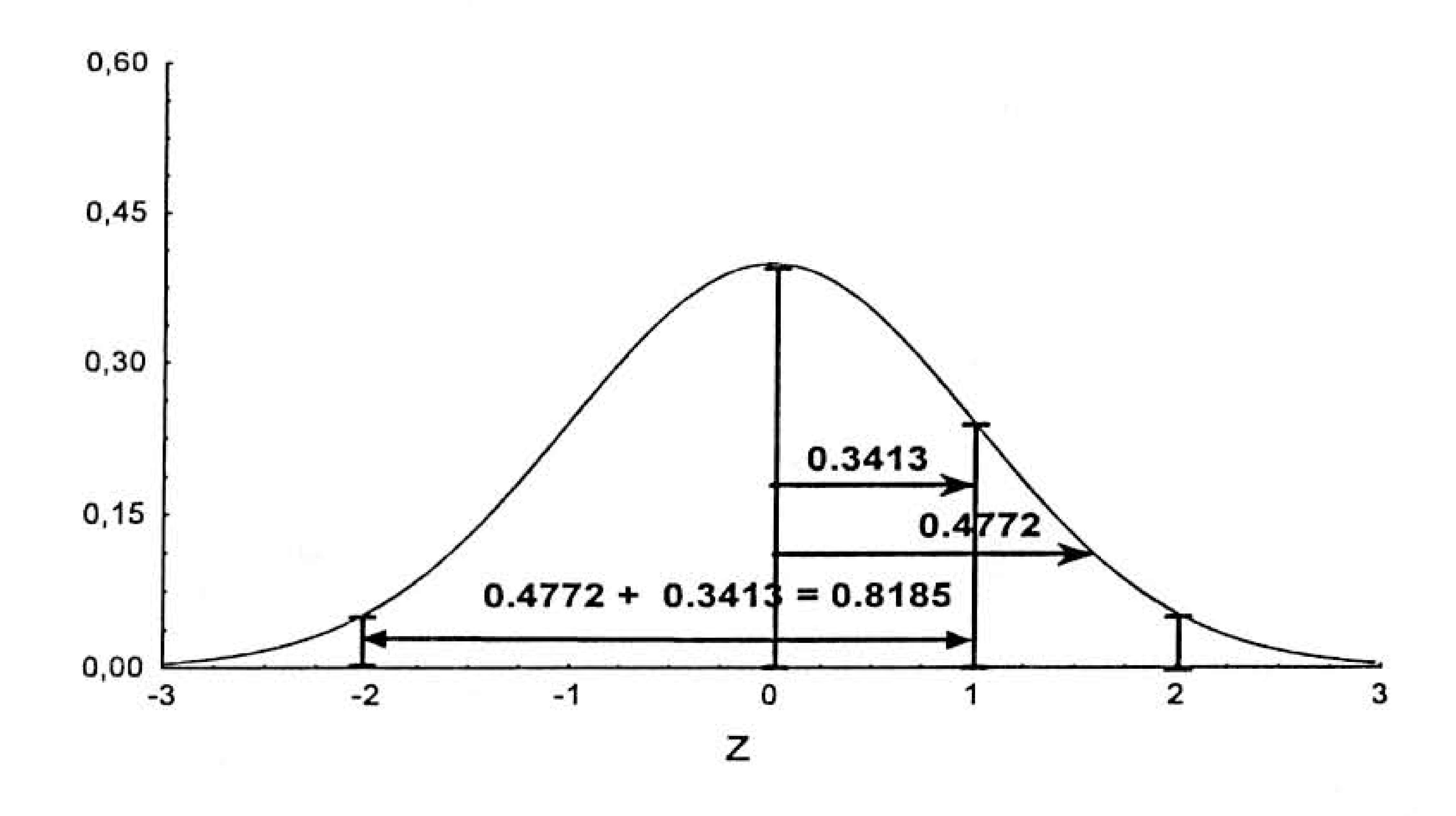
$$P(-1 \leq Z \leq 1) = 2\, P(0 \leq Z \leq 1) = 2 \times 0.3413 = 0.6826$$



مثـــال 5:

أحسب إحتمال $P(-2\leq Z \leq 1)$:

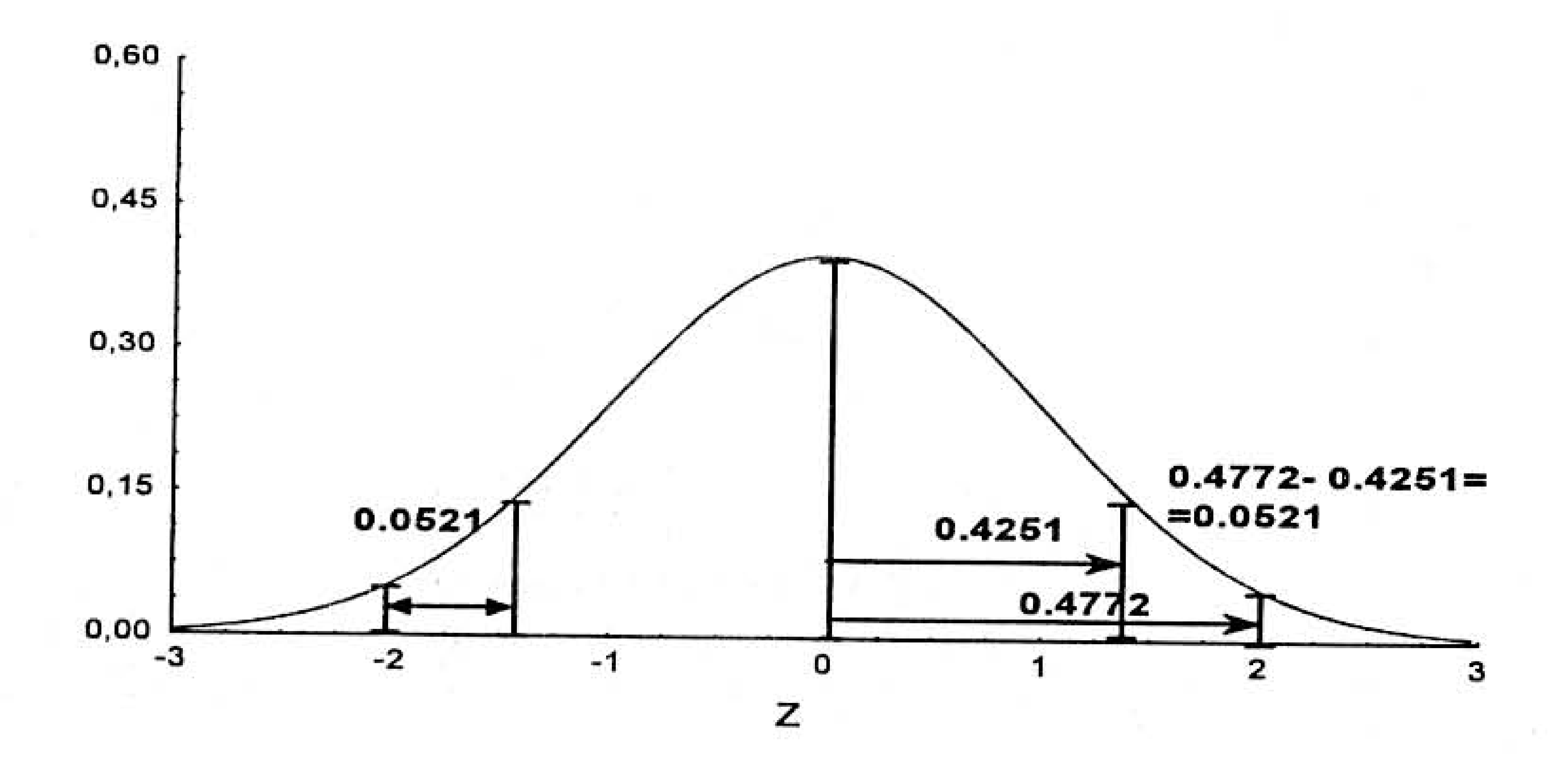
$$P(-2\leq Z \leq 1) = P(0\leq Z \leq 2) + P(0\leq Z \leq 1) =$$
$$= 0.4772 + 0.3413 = 0.8185$$



مثـــــال 6:

أحسب إحتمال $P(-2\leq Z \leq -1.44)$:

$$P(-2\leq Z \leq 1) = P(0\leq Z \leq 2) - P(0\leq Z \leq 1.44) =$$
$$0.4772 - 0.4251 = 0.0521$$

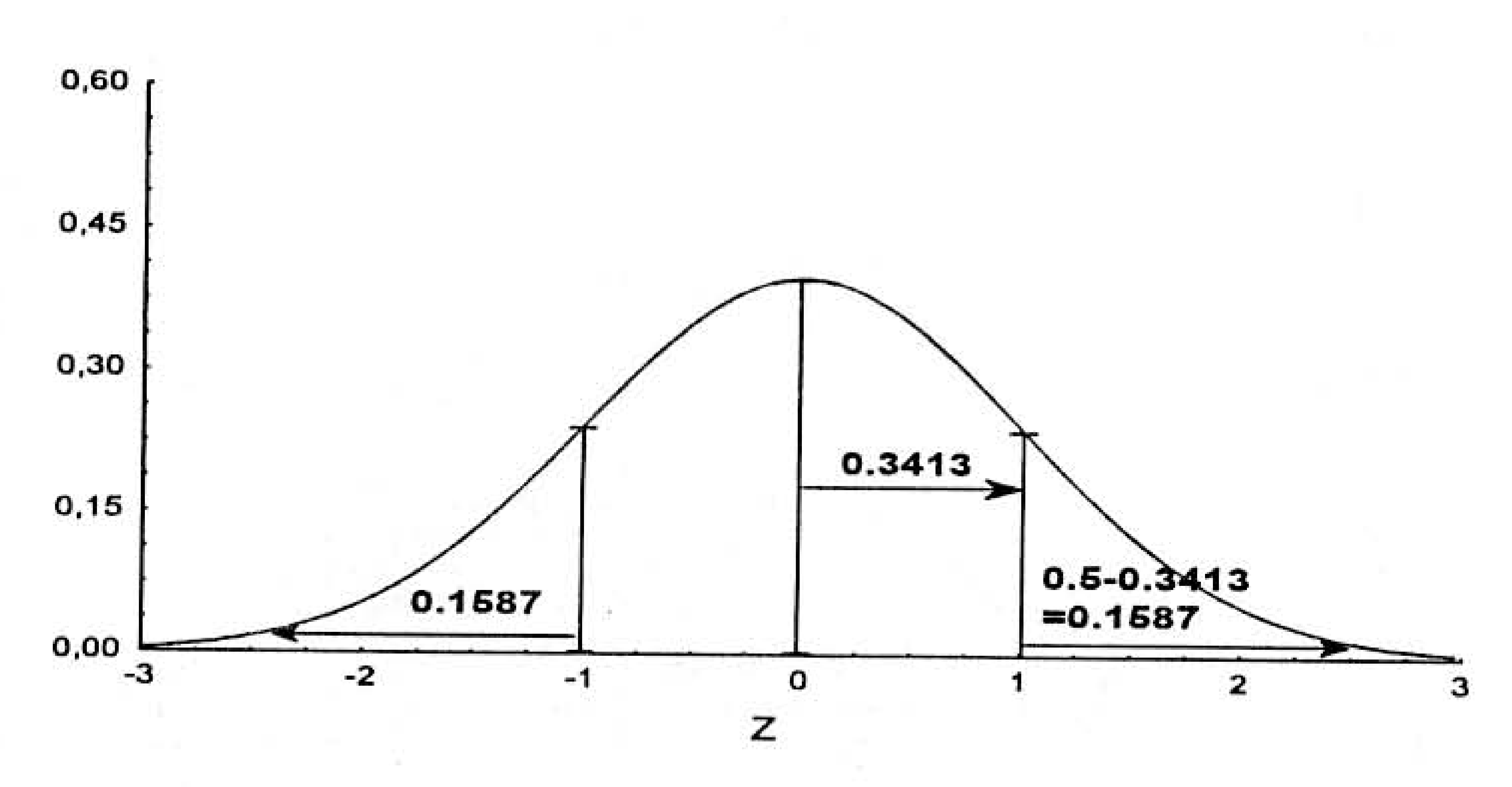


➢ مثـــــال7:

أحسب إحتمال $P(Z \leq -1)$:

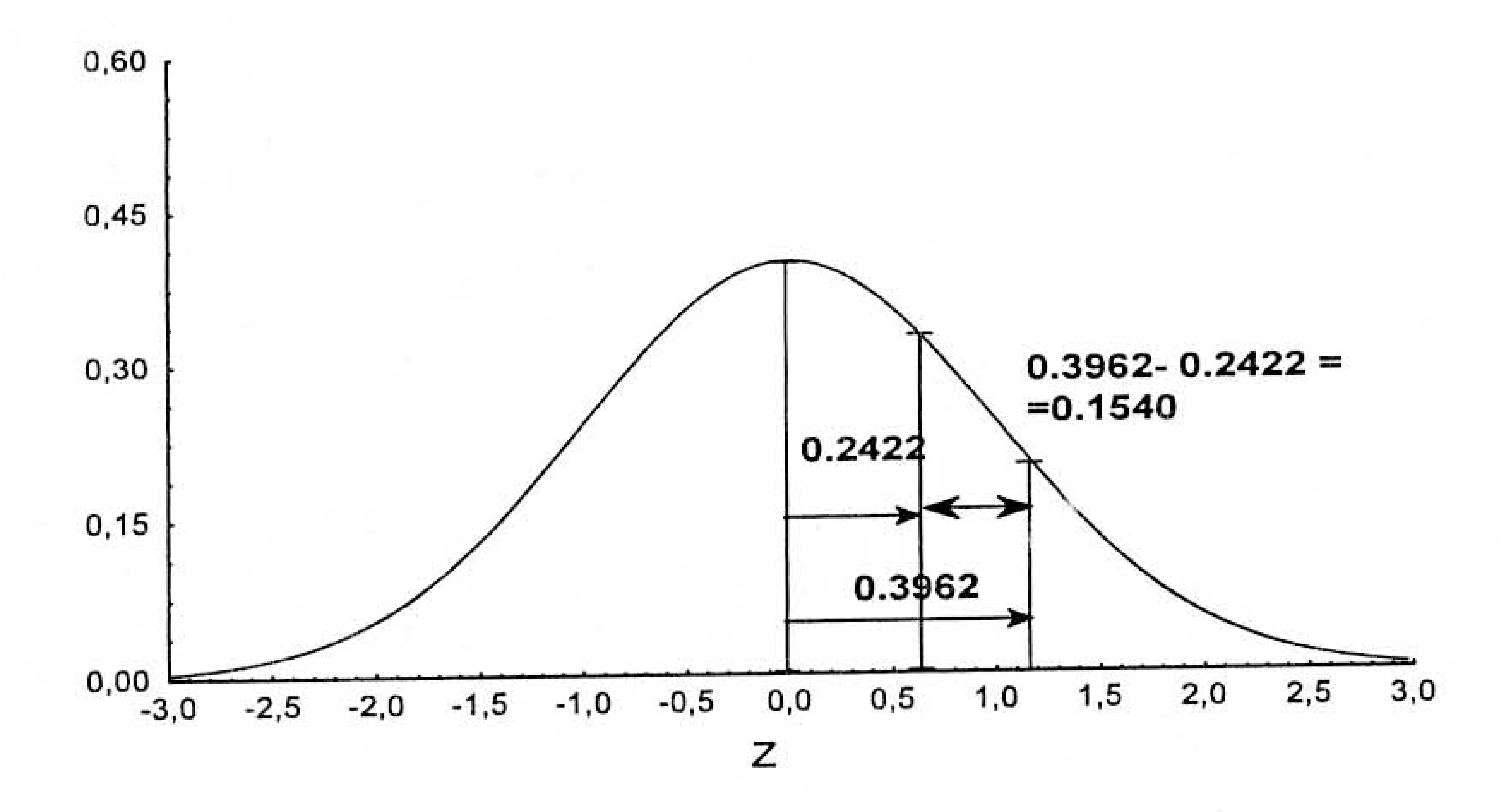
$$P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.5 - 0.3413 = 0.1587$$



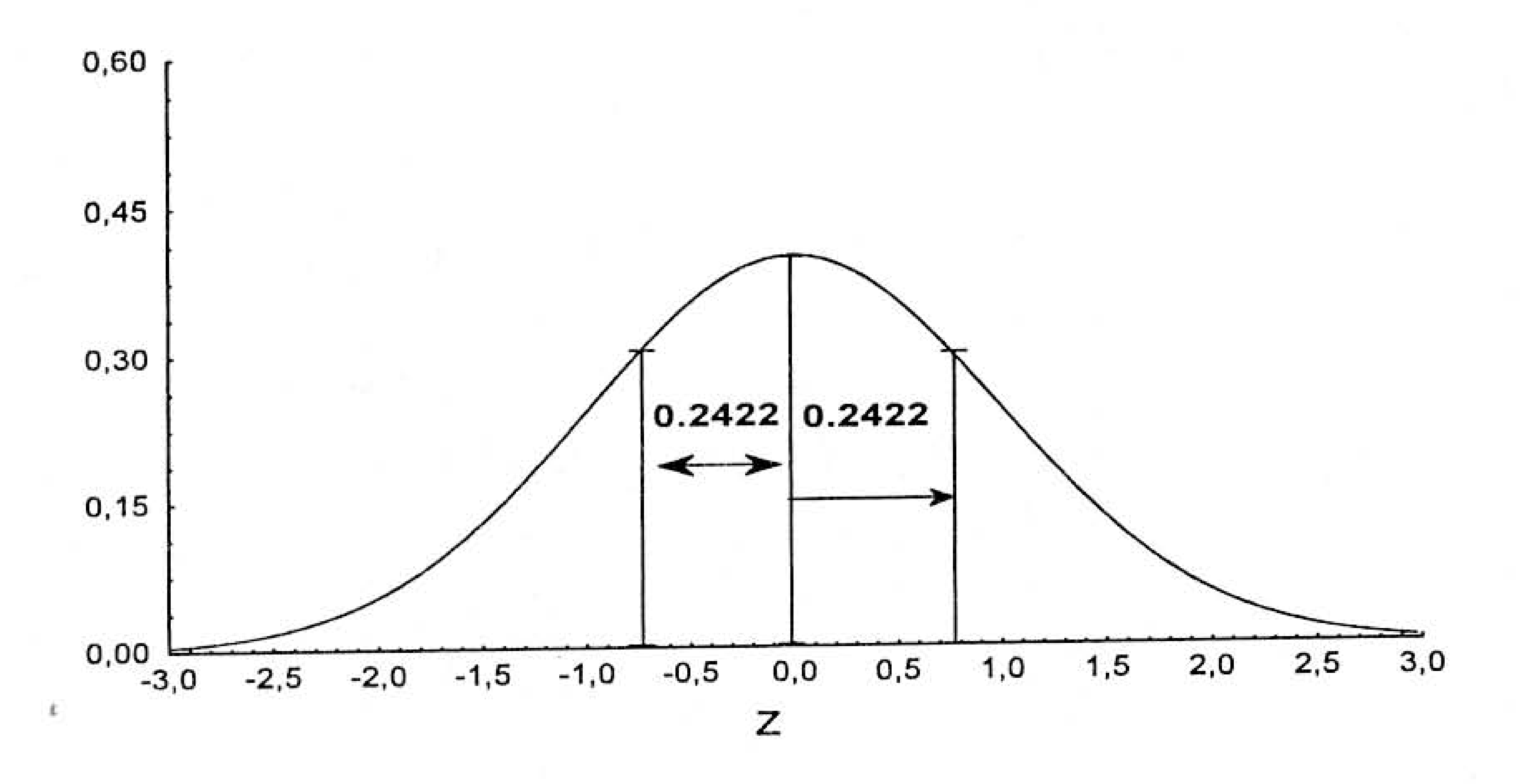
➢ مثـــــال 8:

$$P(0.65 \leq Z \leq 1.26) = P(0 \leq Z \leq 1.26) - P(0 \leq Z \leq 0.65) =$$
$$= 0.3962 - 0.2422 = 0.1540$$



➢ **مثـــــال 9:**

$$P(-0.65 \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq 0.65) = 0.2422$$



➢ **مثـــــال 10:**

إذا كانت درجة الحرارة تخضع للتوزيع الطبيعي بتوقع 20 دم و إنحراف معياري 3.33 دم. أوجد إحتمال أن تتراوح درجة الحرارة بين 21.11 دم و26.66 دم.

➢ الحــــــل:

في هذه الحالة يجب تحويل وحدات التوزيع الطبيعي (N(20,3.33 إلى وحدات التوزيع الطبيعي القياسي (N(0,1 وفق العلاقة:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

أي أن:

$$P(21.11 \leq X \leq 26.66) = P(\frac{21.11-20}{3.33} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{26.33-20}{3.33}) =$$

$$P(0.33 \leq Z \leq 2) = P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 0.33)$$

$$= 0.4772 - 0.1293 = 0.3479$$

3.3.5.1- التقريب الطبيعي لتوزيع ذو الحدين:

إذا كان X متغيرا عشوائيا يخضع لتوزيع ذو الحدين (b (X,n,p، فإن إحتمالات ذو الحدين تقترب من إحتمالات التوزيع ذو الحدين، عندما تكون n كبيرة، حيث:

$$\frac{X-np}{\sqrt{npq}} \to N(0,1) \qquad (1.32)$$

وذلك حسب الخواص التالية:

- إذا كان k عددا صحيحا موجبا بين 0 و n فإن:

$$P(X=k) = P(k-½ \leq X \leq k + ½) =$$

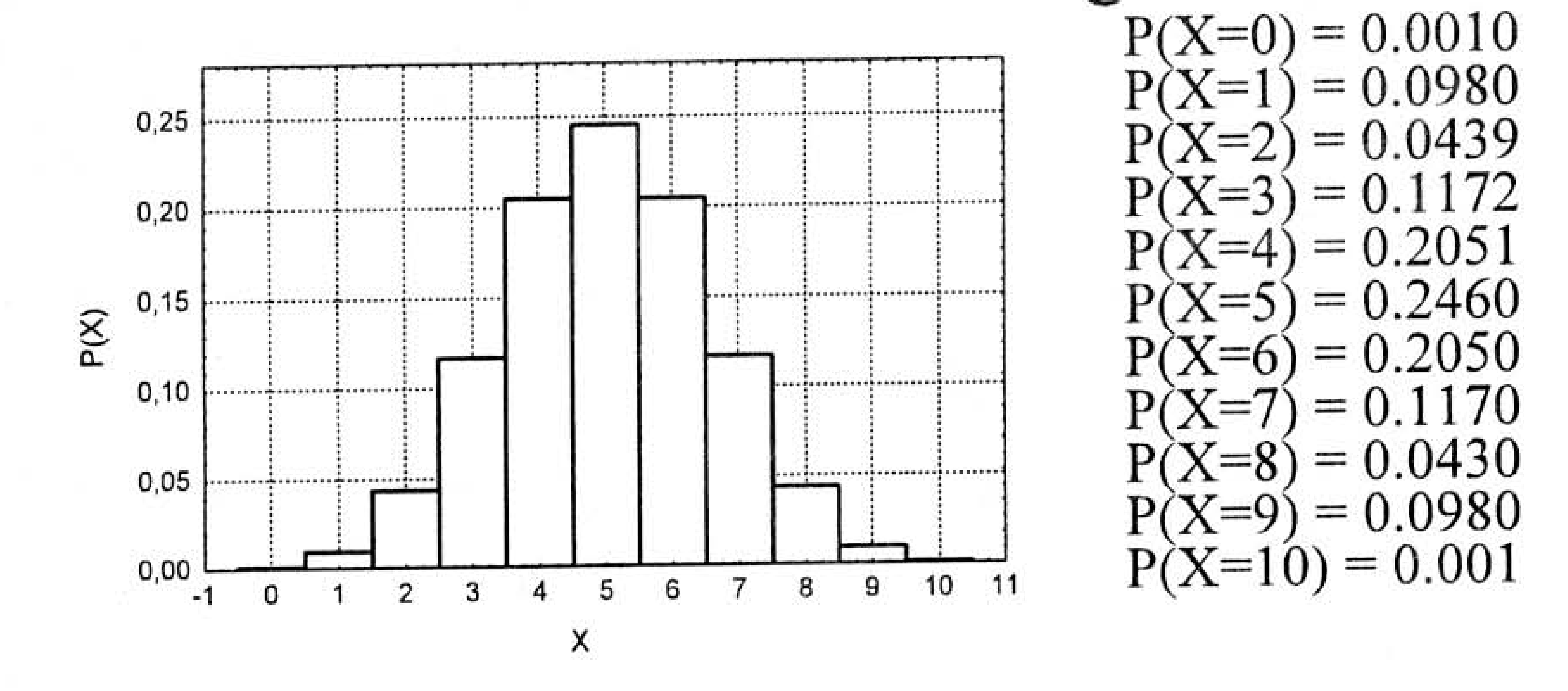
$$\frac{k-1/2-np}{\sqrt{npq}} \leq Z \leq \frac{k+1/2-np}{\sqrt{npq}} \qquad (1.33)$$

- إذا كان a و b أعدادا صحيحة موجبة بين 0 و n فإن:
(1.32)

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{a-1/2-np}{\sqrt{npq}} \leq Z \leq \frac{b+1/2-np}{\sqrt{npq}}$$

➢ مثـــــال:

نرسم المدرج الإحتمالي لتوزيع ذو الحدين التالي: b (X,10,0.5)، حيث: X=0,1,2,........10، مع:



لنأخذ مثلا المستطيل رقم 5، نلاحظ أن عرضه يساوي $5.5 - 4.5 = 1.0$، أما طوله فهو 0.246، وعليه تكون مساحته هي 0.246 (الطول في العرض)؛ وهكذا لباقي المستطيلات.

لنحسب هذه المساحات بالتوزيع الطبيعي وفق أحد القواعد السابقة، ولنأخذ مثلا المستطيل رقم 5.

لدينا: $\mu = np = 10 \text{ x } 0.5 = $ و $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10x0.5x05} = \sqrt{2.5}$

فيكون:

$$P(x=5) = P\left(\frac{4.5-5}{\sqrt{2.5}} \leq Z \leq \frac{5.5-5}{\sqrt{2.5}}\right) = P(-0.316 \leq Z \leq 0.316) =$$
$$= 2x0.1217 = 0.2434$$

من خلال المقارنة بين النتيجتين، يظهر جليا إمكانية إجراء هذا التقارب.

➢ تمـــــرين:

لنفرض أنه لدينا 300 سؤال، لكل سؤال 4 أجوبة، واحدة فقط صحيحة. أوجد إحتمال أن يحصل طالب على 78 إجابة صحيحة. أوجد إحتمال أن يحصل الطالب على 72 و 100 إجابة صحيحة.

➢ الحـــــل:

لدينا X عدد الإجابات الصحيحة، n= 300 و p = ¼.

$$\mu = np = 75$$
$$\sigma = 7.5$$

لنحسب هذا الإحتمال باستعمال ذو الحدين، فنحصل على:

$$b(78,30,\tfrac{1}{4}) = C_{300}^{78}(\tfrac{1}{4})^{78}(\tfrac{3}{4})^{222} = \ldots.$$

إن حساب هذا الإحتمال يتطلب الكثير من الحسابات، و حيث أن n كبيرة فإنه يمكن تقريب ذو الحدين بالطبيعي:

$$P(x = 78) = P(\frac{77.5 - 75}{7.5} \leq Z \leq \frac{78.5 - 75}{7.5})$$
$$= P(0.333 \leq Z \leq 0.467) = 0.051$$

ب)- إحتمال أن يحصل الطالب على 72 و 100 إجابة صحيحة:

$$P(72 \leq x100) = P(\frac{71.5 - 75}{7.5} \leq Z \leq \frac{100.5 - 75}{7.5}) = 0.680$$

4.5.1- توزيع ستونت (t):

أحد التوزيعات الإحتمالية المتصلة، يشبه كثيرا التوزيع الطبيعي، تكمن تطبيقاته في نظرية العينات وإختبار الفرضيات كبديل للتوزيع الطبيعي عندما يكون حجم العينة صغيرا.

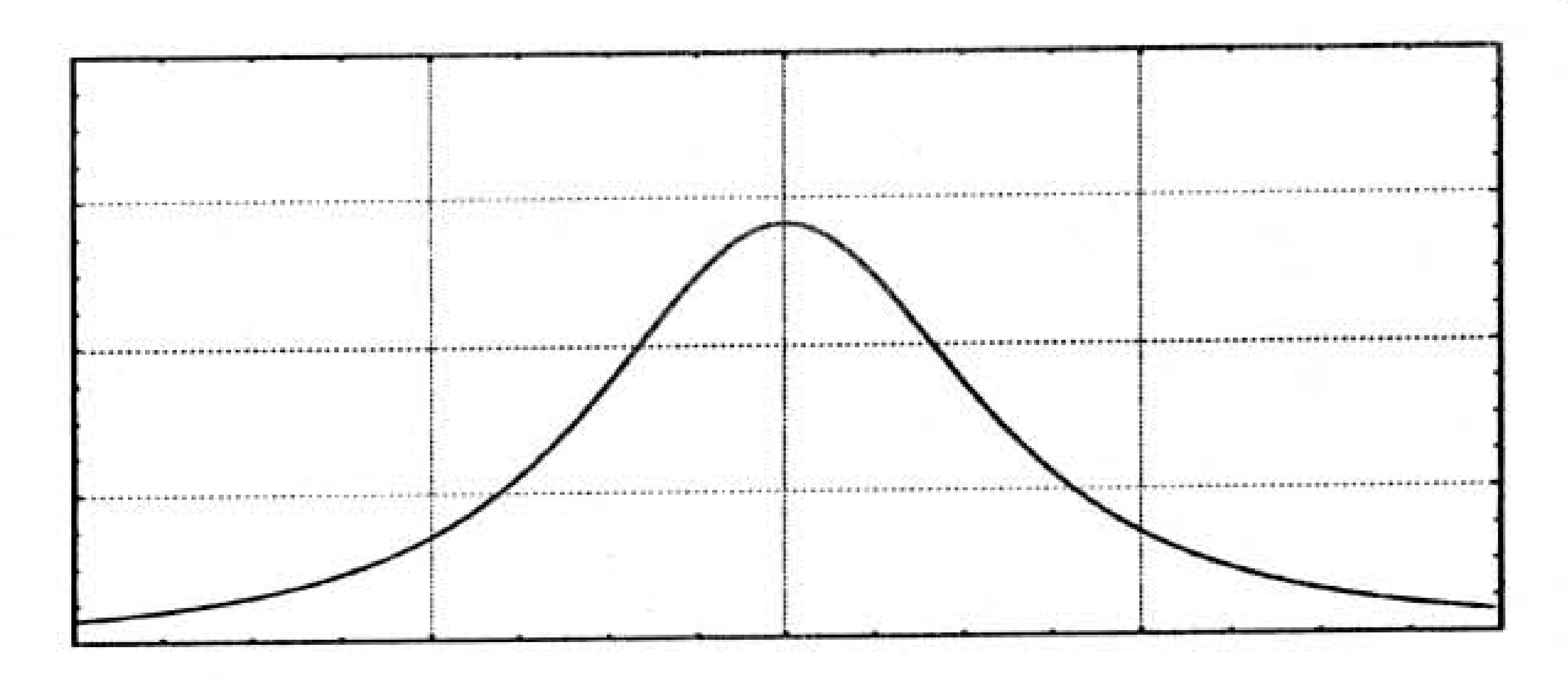
دالة كثافته الإحتمالية تعطى بالعلاقة التالية:

$$f(t) = c(1+\frac{t^2}{\nu})^{-(\nu+2)/2} \quad (1.34)$$

حيث: c: ثابت مرتبط بـــ ν

ν^* : درجات الحرية و $-\infty < t < +\infty$

نرمز لتوزيع t بالرمز $t(\rho, \nu)$.



تحسب إحتمالات توزيع t من خلال الجدول (أنظر الملحق، جدول 4)، حيث تسجل درجات الحرية في العمود الأيسر، أما في الأعلى فتقرأ المساحات (الإحتمالات) وفي داخل الجدول تقرأ قيم t المقابلة.

➢ **مثـــــال:**

ما هي قيمة المساحة التي تقابل حجم العينة 11 و $t = 2.812$.

➢ **الجـــواب:**

لدينا $\nu = n-1$، أي أن $\nu = 10$ و $t = 2.812$ فإن المساحة المقابلة هي 0.95.

إن توزيع t هو توزيع متماثل، حيث أن:

$$\mu = 0 \quad \text{حيث } \nu > 2$$

$$\sigma^2 = \frac{\nu}{\nu - 2} \quad (1.35)$$

* درجات الحرية تعرف بأنها العدد n من المشاهدات المستقلة في العينة ناقص العدد k لمعالم المجتمع (الوسط الحسابي و الإنحراف المعياري أي أن:. $\nu = n-k$ في حالة توزيع t فإن $\nu = n-1$ على أساس أنه يجب معرفة المتوسط الحسابي لهذا التوزيع والذي يساوي الصفر، و بالتالي يكون عدد المعالم المقدرة هو 1.

وبالتالي أمكن الإستفادة من هذه الخاصية في حساب المساحات الصغيرة (و الغير موجودة في الجدول أحيانا)، و ذلك بتطبيق العلاقة التالية:

$$t_{1-p} = -t_p \qquad (1.36)$$

فمثلا، يمكن الكتابة:

$$t_{0.05} = -t_{0.95}$$

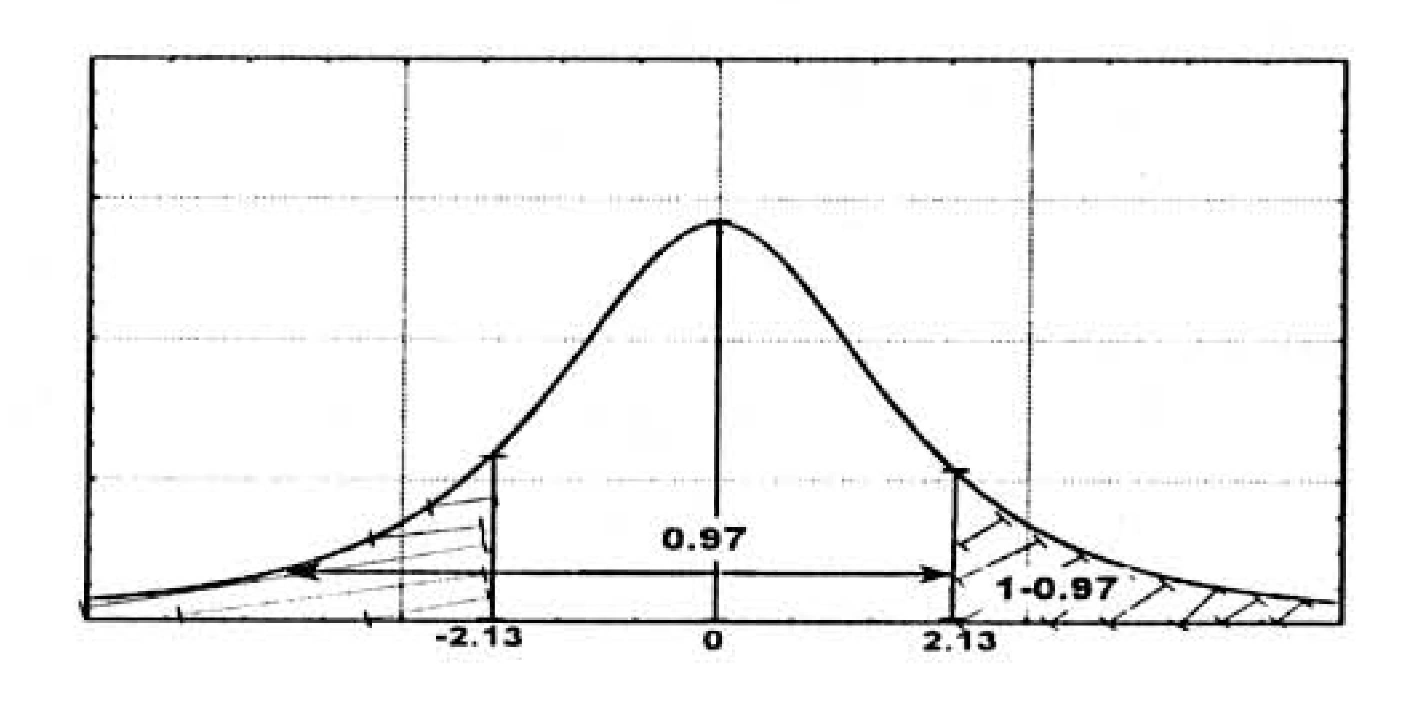
➢ **مثـــال:**

بإستعمال توزيع ستودنت، أوجد المساحة الواقعة على يسار $t = -2.13$ وعند درجات حرية 15.

لدينا:

$t_{1-p} = -t_p$، وحيث أن قيمة t سالبـة فإننا نستخـدم خاصيـة التناظر (لا توجد قيم سالبة في جدول t) أي:

$$t(p,15) = -t(1-p,15)$$



إن قيمة $t = -2.13$ تقابلها $t = 2.13$ ومساحتها 0.97 وحيث أن المساحة المطلوبة هي على يسار 2.13-، فيكون:

$1\text{-}p = 0.97$ من الجدول، ومنه $p = 1\text{-}0.97 = 0.03$، أي أن المساحة الواقعة على يسار $t = -2.13$ و عند درجات حرية 15 هي 0.03.

➢ **مثـال2:**

أوجد قيمة p بحيث يكون: $t\ (p,15) = -2.60$.

➢ الحـــــل:

بالتماثل نجد: $t(\rho,15) = -t(1-\rho,15)$ ، أي أن: $-t(1-\rho,15) = -2.60$

ومن الجدول: $1-p = 0.99$ هذا يعني أن: $p = 0.01$.

➢ مثـــــال3:

أوجد قيمة t التي تقابل $p = 0.05$ و $v = 5$.

➢ الحـــــل:

حيث أن قيمة المساحة صغيرة جدا، يمكن تطبيق الخاصية التالية:

$$t(0.05,15) = -t(1-0.05,15)$$

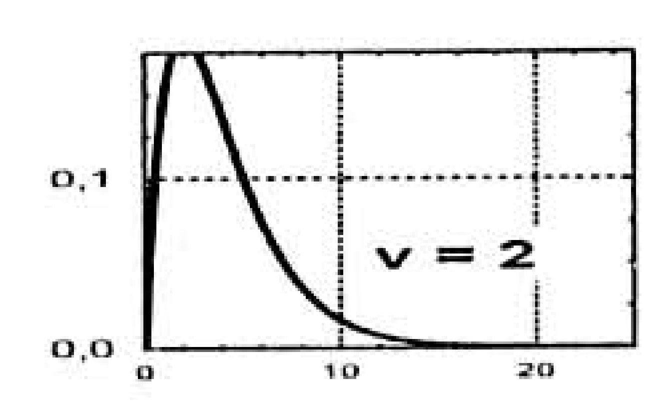
$$t(0.05,15) = -t(0.95,15) = -2.015$$

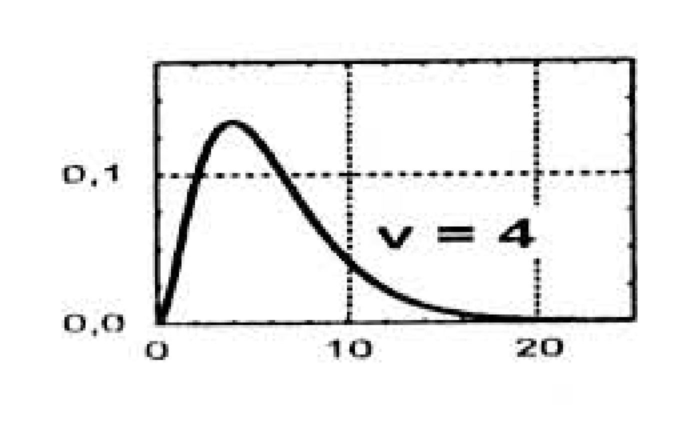
5.5.1– توزيع كاي مربع χ^2 (khi deux) :

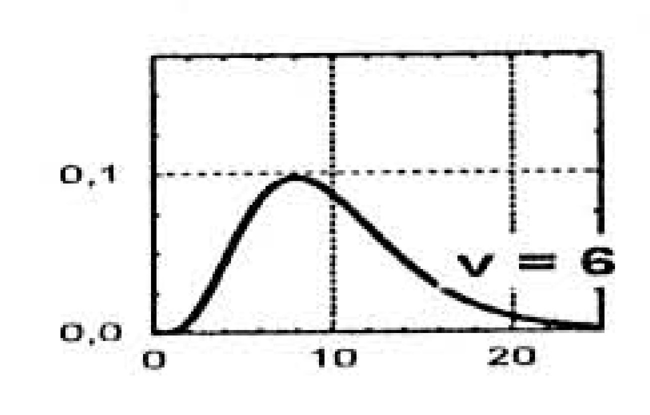
توزيع إحتمالي متصل، له إستعمالات متعددة خاصة في إختبارات الإرتباط و الإستقلال و التوفيق؛ و هو معرف بمتغيره العشوائي χ^2. دالة كثافته الإحتمالية تعطى بالعلاقة التالية:

$$f(\chi^2) = c(\chi^2)^{(v-2)/2} e^{-\chi^2/2} \quad , \chi^2 > 0 \qquad (1.37)$$

حيث أن c ثابـــت يعتمد على v ليجعل المساحة تحت المنحني تســـاوي 1 و $v = n-1$.







ولإيجاد إحتمالات الـــ χ^2، فإننا نستخدم الجدول الخاص بهذا التوزيع (أنظر الملحق، جدول 5)، حيث نجد أفقيا المساحات المقابلة، عموديا درجات الحرية وفي داخل الجدول تقرأ قيم الـــ χ^2.

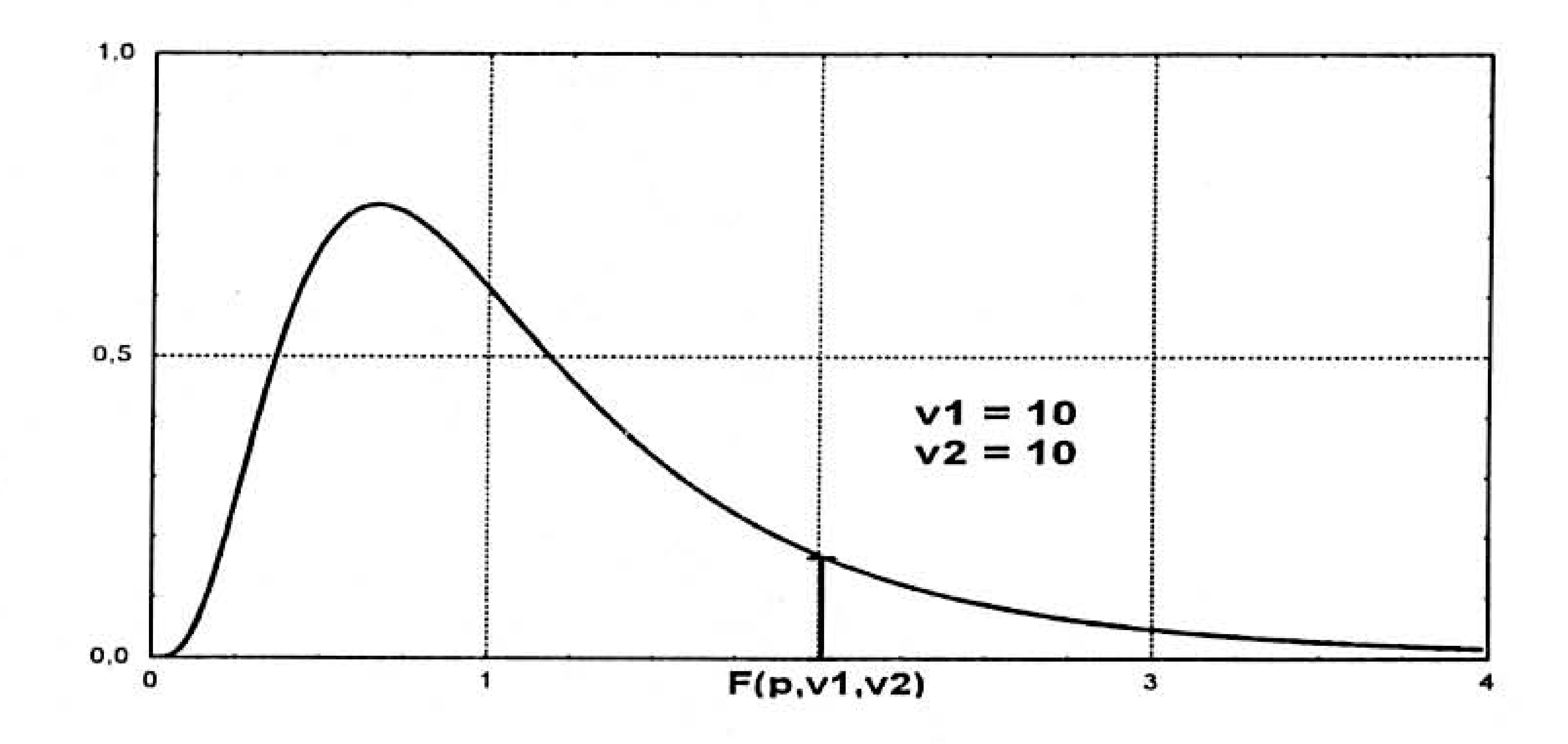
- مثال1: $(0.99,10) = 23.20$
- مثال2: $(0.025,10) = 3.247$

6.5.1- توزيع F (فيشر، سنيديكور Fischer, Snedecor) :

أحد التوزيعات الإحتمالية المتصلة المهمة والمستخدمة في إختبار الفرضيات و في تحليل التباين. يعرف متغيره العشوائي بالدالة الإحتمالية التالية:

$$f(F) = \frac{C.F^{(v1-2)/2}}{(v_2 + v_1.F)^{(v1+v2)/2}} \quad \text{و} \quad F > 0 \qquad (1.38)$$

يرمز له بالرمز$F\ (v_1,v_2)$ ، حيث v_1 و v_2 هما درجات الحرية و C هو ثابت يعتمد على v_1 و v_2 ليجعل المساحة تحت المنحنى يساوي 1.



إن لهذا التوزيع عددان من درجة الحرية، وحيث أن v_2 لا تظهر إلا في المقام، فإننا نسمي v_2 درجات حرية المقام و نسمي v_1 درجات حرية البسط. يقترب توزيع F من التوزيع الطبيعي بزيادة قيمتي v_1 و v_2.

➢ مثـــــال:

$$F(0.95,9,7) = 3.68$$

➢ ملاحظة: هناك بعض المساحات الصغيرة لا توجد في جداول توزيع F، ولإيجاد هذه المساحات فإنه يمكن إستعمال القاعدة التالية:

$$F(p, v1, v2) = \frac{1}{F(1 - p, v2, v1)} \qquad (1.39)$$

➢ مثـــــال:

$$F(0.05,10,7) = \frac{1}{F(0.95,7,10)} = \frac{1}{3.14} = 0.318$$

$$F(0.01,11,15) = \frac{1}{F(0.99,15,11)} = \frac{1}{4.25} = 0.23$$

• علاقة بين الـــ χ^2 و t و F:

أ)

$$F_{(1-p,1,v)} = t^2_{(1-(p/2),v)} \qquad (1.40)$$

➢ مثـــــال:

إذا كانت لدينا: $p = 0.05$ و $v = 3$ فإن:

$$F_{(1-0.05,1,3)} = 10.1$$

$$t(1-(p/2),v) = t(1-(0.05/2),3) = 3.18$$

$$t^2 = 10.11$$

ب):

$$F_{(p,v,\infty)} = \frac{\chi^2_{(p,v)}}{v} \qquad (1.41)$$

➢ مثـــــال:

$$F_{(0.95,3,\infty)} = 2.60$$

$$\frac{\chi^2_{(0.95,3)}}{3} = \frac{7.81}{3} = 2.60$$

6.1- التوزيعات الإحتمالية الثنائية:

نفرض أن X و Y متغيران عشوائيان معرفان على نفس فضاء العينة S حيث:

$Sx = \{X_1, X_2, ...X_n\}$ و $Sx = \{Y_1, Y_2, ...Yn\}$

إذا كان (X,Y) متغيرا عشوائيا ثنائيا فإن $h\ (X,Y)$ يكون إقترانا إحتماليا (توزيعا مشتركا) إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} h(x,y) \geq 0 \\ \sum_x \sum_y h(x,y) = 1 \end{cases} \qquad (1.42)$$

Y / X	Y_1	Y_2	....	Y_m	المجموع
X_1	$h(x_1,y_1)$	$h(x_1,y_2)$	......	$h(x_1,y_m)$	$f(x_1)$
X_2	$h(x_2,y_1)$	$h(x_2,y_2)$	....	$h(x_2,y_m)$	$f((x_2)$
.		.			
.		.			
X_n	$h(x_n,y_1)$	$h(x_n,y_2)$	......	$h(x_n,y_m)$	$f(x_n)$
المجموع	$g(y_1)$	$g(y_2)$	......	$g(y_m)$	

نسمي:

$f_x(x) = \sum_y h(x,y)$ (1.43) بالكثافة الهامشية للمتغير X

أما (1.44) $g_y(y) = \sum_x h(x,y)$ فهو إقتران الكثافة الهامشية لـــ Y.

أما الكثافة الشرطية للمتغير X إذا علم Y فهي:

$$h(x/y) = \frac{h(x,y)}{f_y(y)} \qquad (1.45)$$

والعكس، الكثافة الشرطية للمتغير Y إذا علم X فهي:

$$h(y/x) = \frac{h(x,y)}{f_x(x)} \qquad (1.46)$$

➢ **مثـــــال1:**

ليكن X المتغير العشوائي المعرف كما يلي:

$$\begin{cases} \text{الشخص يدخن} & X=1 \\ \text{الشخص لا يدخن} & X=0 \end{cases}$$

وليكن Y المتغير العشوائي المعرف كمايلي:

$$\begin{cases} \text{الشخص مصاب بالسرطان} & X=1 \\ \text{الشخص غير مصاب} & Y=0 \end{cases}$$

نلخص الإقتران الإحتمالي h(X,Y) كما يلي:

Y / X	0	1
0	0.40	0.02
1	0.03	0.55

إن إحتمال أن يكون الشخص وغي مصاب هو 0.40 أي:

$P(X=0, Y=0) = h(0,0) = 0.40$
$P(X=0, Y=1) = h(0,1) = 0.02$

....

➢ **مثـــال2:**

من خلال الإقتران الإحتمالي التالي يمكن إيجاد:

Y / X	0	1	الكثافة الهامشية X $f_x(x)=\sum_y h(x,y)$
0	0.1	0.0	0.1
1	0.3	0.4	0.7
2	0.1	0.1	0.2
الكثافة الهامشية Y $g_y(y)=\sum_x h(x,y)$	0.5	0.5	1

أما الإحتمالات الشرطية $h(x/y)=\frac{h(x,y)}{f_y(y)}$ فتكون على الشكل التالي:

X \ Y	0	1
0	0.2	0
1	0.6	0.8
2	0.2	0.2

$$h(x/y)=\frac{h(x,y)}{f_y(y)}=f(x/y)=\frac{h(0,1)}{0.5}=\frac{0.1}{0.5}=0.2$$

$$h(x/y)=\frac{h(x,y)}{f_y(y)}=f(x/y)=\frac{h(1,1)}{0.5}=\frac{0.3}{0.5}=0.6$$

$$h(x/y)=\frac{h(x,y)}{f_y(y)}=f(x/y)=\frac{h(1,2)}{0.5}=\frac{0.1}{0.5}=0.2$$

....

➢ **ملاحظة:**

يكون X و Y مستقلين إذا كان:

$$(1.44)\ h(X,Y)=f_x(X).g_y(Y)$$

ففي المثال السابق نجد أن:

$$h(X,Y)\neq f_x(X).g_y(Y)$$

$$h(0,1)\neq 0.1\text{x}0.5$$

$$0.1\neq 0.05$$

أي أن المتغيرين مرتبطان.

1.6.1- الأمل الرياضي:

ا)- حالة المتغيرات العشوائية المنفصلة:

إذا كان X و Y متغيران عشوائيان منفصلين و معرفين بالإقتران h(X,Y) فإن:

$$E(X) = \mu_x = \sum_x \sum_y X.h(X,Y) \qquad (1.47)$$

$$E(Y) = \mu_y = \sum_y \sum_x Y.h(X,Y) \qquad (1.46)$$

ب)- حالة المتغيرات العشوائية المتصلة:

إذا كان X و Y متغيران عشوائيان متصلين و معرفين بالإقتران f(X,Y) فإن:

$$E(X) = \mu_x = \iint_R X.h(X,Y)dXdY \qquad (1.48)$$

$$E(Y) = \mu_y = \iint_R Y.h(X,Y)dXdY \qquad (1.49)$$

2.6.1- التباين:

ا)- حالة المتغيرات العشوائية المنفصلة:

$$\sigma^2(X) = \sum_x \sum_y (X - E(X))^2.h(X,Y) \qquad (1.50)$$

$$\sigma^2(Y) = \sum_x \sum_y (Y - E(Y))^2.h(X,Y) \qquad (1.51)$$

ب)- حالة المتغيرات العشوائية المتصلة:

$$\sigma^2(X) = \iint_R (X - E(X))^2.h(X,Y)dXdY \qquad (1.52)$$

$$\sigma^2(Y) = \iint_R (Y - E(Y))^2.h(X,Y)dXdY \qquad (1.53)$$

3.6.1- التباين المشترك (التغاير):

له بالرمز Cov(X,Y)، و يعطى بالعلاقة التالية:

ويرمز **ا)- حالة المتغيرات العشوائية المنفصلة:**

$$Cov(X,Y) = \sigma_{xy} = \sum_i \sum_j (X_i - \mu_x)(Y_j - \mu_y).h(X,Y) \qquad (1.54)$$

ويمكن تبسيطه ليأخذ الشكل التالي:

$$Cov(X,Y) = \sigma_{xy} = \sum_{i}\sum_{j} X_{i}.Y_{j}.h(X,Y) - \mu_{x}.\mu_{y} \quad (1.55)$$
$$= E(X,Y) - E(X).E(Y)$$

ب)- حالة المتغيرات العشوائية المتصلة:

$$Cov(X,Y) = \iint_{R}(X_{i} - \mu_{x})(Y_{i} - \mu_{y}).h(X,Y)dXdY \quad (1.56)$$

4.6.1- معامل الإرتباط:

يقيس معامل الإرتباط شدة العلاقة بين المتغير X و المتغير Y، و يعطى بالعلاقة التالية:

$$\rho(x,y) = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_{x}\sigma_{y}} \quad (1.57)$$

حيث:

$$0 \leq \rho \leq 1$$

إذا كان $Cov(x,y) = 0$ فإن $\rho = 0$، أي أن X و Y مستقلان.

➢ **تمـــــرين:**

نفترض التوزيع المشترك الإحتمالي التالي:

Y / X	-3	2	4	المجموع
1	0.1	0.2	0.2	0.5
2	0.3	0.1	0.1	0.5
المجموع	0.4	0.3	0.3	1

ا): أحسب التباين المشترك لهذا التوزيع،

ب): أحسب معامل الإرتباط، هل X وY مستقلان؟.

➢ الحـــــل:

لدينا:

$$Cov(X,Y) = \sigma_{xy} = \sum_i \sum_j X_i.Y_j.h(X,Y) - \mu_x.\mu_y$$

$$\mu_x = \sum Xf(X) = 1x0.5 + 3x0.5 = 2$$

$$\mu_y = \sum Yg(Y) = -3x0.4 + 2x0.3 + 4x0.3 = 0.6$$

$$E(X,Y) = \sum_i \sum_j X_i.Y_j.h(X,Y) = 1x(-3)x0.1 + 1x2x0.2 + \dots\dots\dots + 3x4x0.1 = 0$$

ومنه:

$$Cov(X,Y) = 0 - 2x0.6 = -1.2$$

من جهة أخرى لدينا:

$$\sigma^2_x = \sum X^2.f(X) - \mu_x^2 = (1x0.5 + 9x0.5) - 4 = 1$$

$$\sigma^2_y = \sum X^2.g(X) - \mu_y^2 = (9x0.4 + 4x0.3 + 16x0.3) - 0.36 = 9.24$$

لنصل إلى:

$$\rho(x,y) = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-1.2}{\sqrt{1}x\sqrt{9.24}} = -0.4$$

من المؤكد أن X و Y غير مستقلين لأن معامل الإرتباط غير معدوم، ولكن يمكن التأكد من العلاقة التالية:

$$h(X,Y) = f_x(X).g_y(Y)$$
$$h(1,-3) \neq 0.4x0.5$$
$$0.1 \neq 2$$

تمارين مختارة

التمرين الأول:

صنعت قطعة نقود بحيث يكون إحتمال ظهور الصورة هو ضعف إحتمال ظهور الكتابة في الرمية الواحدة. أوجد إحتمال ظهور الصورة، أوجد إحتمال ظهور الكتابة.

التمرين الثاني:

إختيرت 03 مصابح كهربائية بطريقة عشوائية من بين 15 مصباح كهربائي، 05 منها فاسدة. أوجد الإحتمال P يحيث يكون:
- جميعها سليمة، - واحدة فقط فاسدة، - واحدة على الأقل فاسدة.

التمرين الثالث:

إذا كان إحتمال إن يصيب 03 رجال هدفا هو على التوالي: 1/6، 1/4، 1/3. فإذا كان كل منهم يصوب مرة واحدة على الهدف، أوجد إحتمال: - أن يصيب الهدف مرة واحدة. - إذا أصاب الهدف رجل واحد فقط، ما هو إحتمال أن يكون الرامي الثاني؟.

التمرين الرابع:

في إحدى الجامعات، وجد أن 4% من الطلبة و1% من الطالبات أطوالهم أكثر من 1.80م وأن 60 % من مجموع طلبة الجامعة إناث. أختير بطريقة عشوائية أحد الطلبة ووجد أن طوله أكثر من 1.80م. ما هو إحتمال أن يكون هذا الإختيار طالبة.

التمرين الخامس:

تنتج 3 ماكينات على التوالي 60 %، 30 %، 10% % من الإنتاج الكلي لمصنع ما؛ فإذا كانت نسبة الإنتاج الفاسد لهذا المصنع هو على التوالي: 2 %،

3 %، 4 %. أختيرت وحدة بطريقة عشوائية ووجدت أنها فاسدة. أوجد إحتمال أن تكون من الماكنة الثالثة.

التمرين السادس:

ترمى زهرة نرد مرة واحدة. نعرف X المتغير العشوائي الذي يمثل ضعف العدد الذي يظهر.

- أنشئ جدول قانون التوزيع الإحتمالي المقابل ثم مثل بيانيا هذا التوزيع،
- أحسب أمله الرياضي ثم إنحرافه المعياري.

التمرين السابع:

ليكن X متغير عشوائي متصل معرفة بالدالة الإحتمالية التالية:

$$f(X) = \begin{cases} 1/2 & 1 \leq X \leq 3 \\ 0 & \text{دون ذلك} \end{cases}$$

- أحسب $P(0 \leq X \leq 3)$ ، - أحسب الأمل الرياضي ثم الإنحـــراف المعياري،
- مثل بيانيا هذا التوزيع.

التمرين الثامن:

إذا كان 10 % من الطلبة الأوائل ينتقلون من المدى القصير إلى المدى الطويل، فإذا كانت علامات الطلبة موزعة طبيعيا بمتوسط 72 وإنحراف معياري 9؛ فما هي أدنى علامة تأخذ بعين الإعتبار لإنجاز عملية الإنتقال ؟.

التمرين التاسع:

تم حقن مريض بمضاد حيوي معين، فإذا كان إحتمال أن يسبب المضاد الحيوي حساسية هو 0.01، فأوجد الإحتمال أنه من بين 2000 مريض تم حقنهم بالمضاد الحيوي أن يكون:

- مريض واحد يصاب بالحساسية، - 3 مرضى سيصابون،
- أكثر من 3 مرضى سيصابون بالحساسية.

التمرين العاشر:

متوسط طول 500 ورقة نبات ما هو 151 مم بإنحراف معياري 15مم، فإذا كانت الأطوال موزعة طبيعيا، فما هو عدد الأوراق التي أطواها:

- بين 120 و 155 مم، - أكبر من 185 مم.

التمرين الحادي عشر:

إذا كانت علامات الطلبة في مقياس الإحصاء الرياضي موزعة طبيعيا وكانت:

$$,n = 100, \qquad \sigma = 2 \sum X^2 = 14800$$

- إحسب إحتمال أن تكون علامة الطالب تزيد عن 17،
- إحسب إحتمال أن تكون علامة الطالب تقل عن 17.

التمرين الثاني عشر:

ألقيت قطعة نقود 12 مرة، ما هو إحتمال أن نحصل على الصورة عدد من المرات يتراوح بين 4 و 7 و ذلك بإستخدام:

- توزيع ذو الحدين،
- التقريب الطبيعي لذو الحدين.

التمرين الثالث عشر:

ألقيت قطعة نقود 3 مرات. نفرض X الذي يدل على 0 أو 1 تبعا لظهور الصورة أو الكتابة في الرمية الأولى؛ و نفرض أن Y تدل على عدد مرات ظهور الصورة.

- أوجد توزيع المتغيرX و المتغير Y،
- التوزيع المشترك لـــX و Y،
- أحسب التباين المشترك لهذا التوزيع ثم معلمل الإرتباط،
- هل X وY مستقلين؟.

التمرين الرابع عشر:

ليكن X المتغير العشوائي و له التوزيع التالي:

X:	-2	-1	1	2
F(X):	1/4	1/4	1/4	1/4

وأن $Y = X^2$

- أوجد التوزيع g الموافق للمتغير Y،
- أوجد التوزيع المشترك $h(X,Y)$،
- معامل الإرتباط لهذا التوزيع.

التمرين الخامس عشر:

ليكن X متغير عشوائي معرف من خلال رمي قطعة نقود متزنة حيث X = 1 عند ظهور الصورة، X = 2 عندما تظهر الكتابة. ترمى قطعة النقود 3 مرات متتالية، وليكن X_1 للرمية الأولى،X_2 للرمية الثانية، X_3 للرمية الثالثة.

نعرف المتغير Y بالقانون: $Y = X_1^2 - X_2 - X_3$.

- أوجد القيم الممكنة ..... $y_1, y_2,$ الموافقة لـــY وماهي الإحتمالات المقابلة $P_1, P_2, \ldots$.،
- مثل بيانيا دالة التوزيع الإحتمالية $f(y)$، حيث $f(Y<y)$،
- أحسب $E(Y)$ ثم σ.

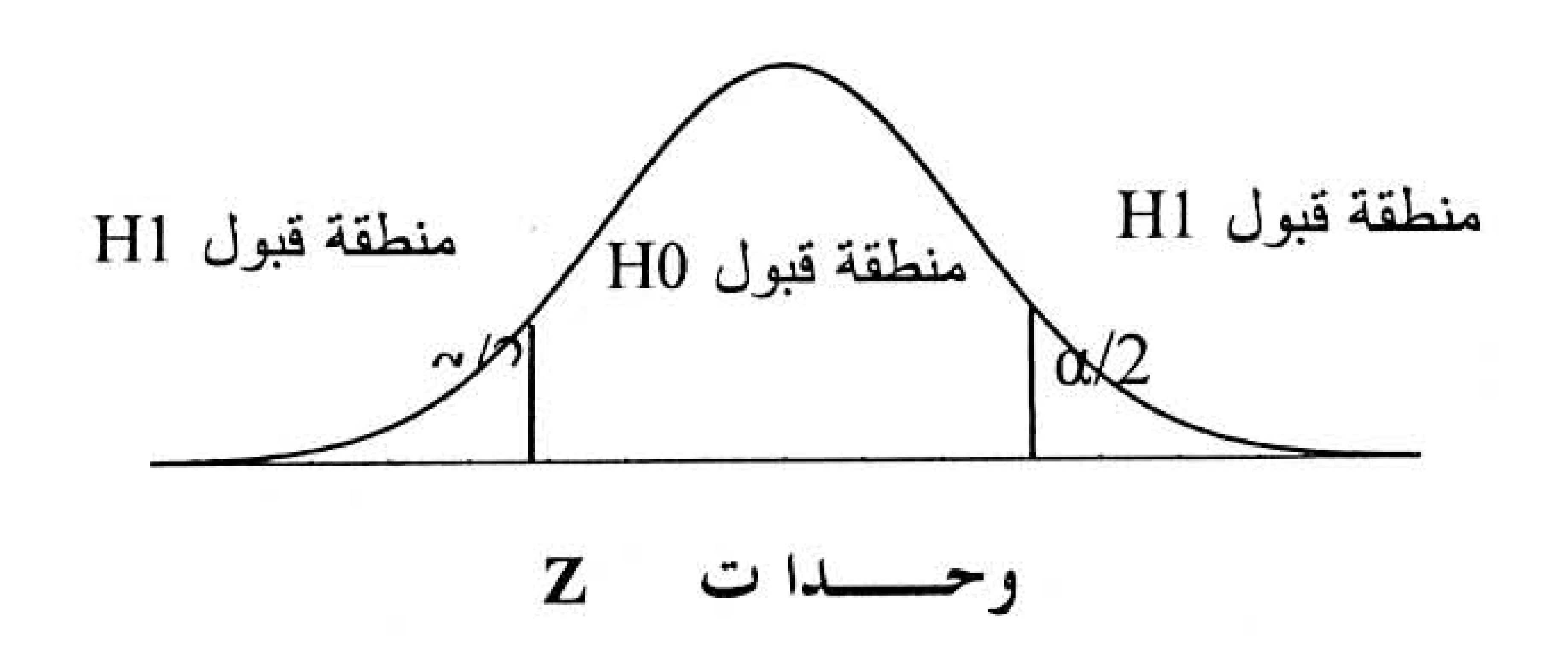


الفصل الثاني
ختبار الفرضيات

مقدمة:

الفرضية هي جملة حول مجتمع إحصائي أو أكثر معالمه (σ،μ) مأخوذة منه عينة عشوائية، وعلى أساس القرار الإحصائي، إما أن نقبل وإما أن نرفض هذه الفرضية بدرجة ثقة معلومة (إحتمال القبول أو الرفض). يتم فحص الفرضية وفق الخطوات التالية:

- دراسة طبيعة البيانات الإحصائية، هل هي نوعية، متصلة.....بغرض معرفة طبيعة التوزيع الذي تخضع له البيانات،
- وضع الفرضيات، ففي الغالب يوجد نوعين من الفرضيات: الفرضية العدمى H_0 التي لا تعبر عن وجود تغيرات والفرضية البديلة H_1 التي تمثل عكس الفرضية العدمى،
- دالة الإختبار، والتي تساعد في إتخاذ القرار حول الفرضية، فالدالة هي متغير عشوائي، لأن قيمتها تتغير بتغير العينة الإحصائية لذلك يجب معرفة طبيعة التوزيع الإحتمالي الذي تخضع له البيانات،
- القرار الإحصائي، ففي الواقع ينقسم مجال دالة الإختبار إلى منطقتين، منطقة قبول H_0 وهو ما يعني رفض H_1 ومنطقة رفض H_0 وهو ما يعني قبول H_1



إن إتخاذ أي قرار إحصائي ينطوي على خطأ بنسبة ما، فمن المحتمل أن نرفض فرضية لإي حين أنها صحيحة أو العكس، ولذلك يمكن أن نستنتج نوعين من الأخطاء. الخطأ من النوع الأول و الناتج عن رفض H_0 عندما تكون هذه الأخيرة صحيحة، و الخطأ من النوع الثاني والناتج عن قبول H_0 في حين أنها خاطئة. يكون إحتمال الخطأ الأول هو α، أي أن مستوى الثقة يساوي $1-\alpha$، أما خطأ النوع الثاني فيرمز له بالرمز β (إحتمال فرض خاطئ)، فإذا نقصت قيمة α فسوف نضطر إلى قبول إحتمال أكبر لـــ β، ولتفادي ذلك لإغنه يجب زيادة حجم العينة. ويمكن تلخيص ذلك في الجدول التالي:

الحقيقة / القرار	H_0 صحيحة	H_0 خاطئة
قبول H_0	قرار صحيح	خطأ من النوع الثاني
رفض H_0	خطأ من النوع الأول	قرار صحيح

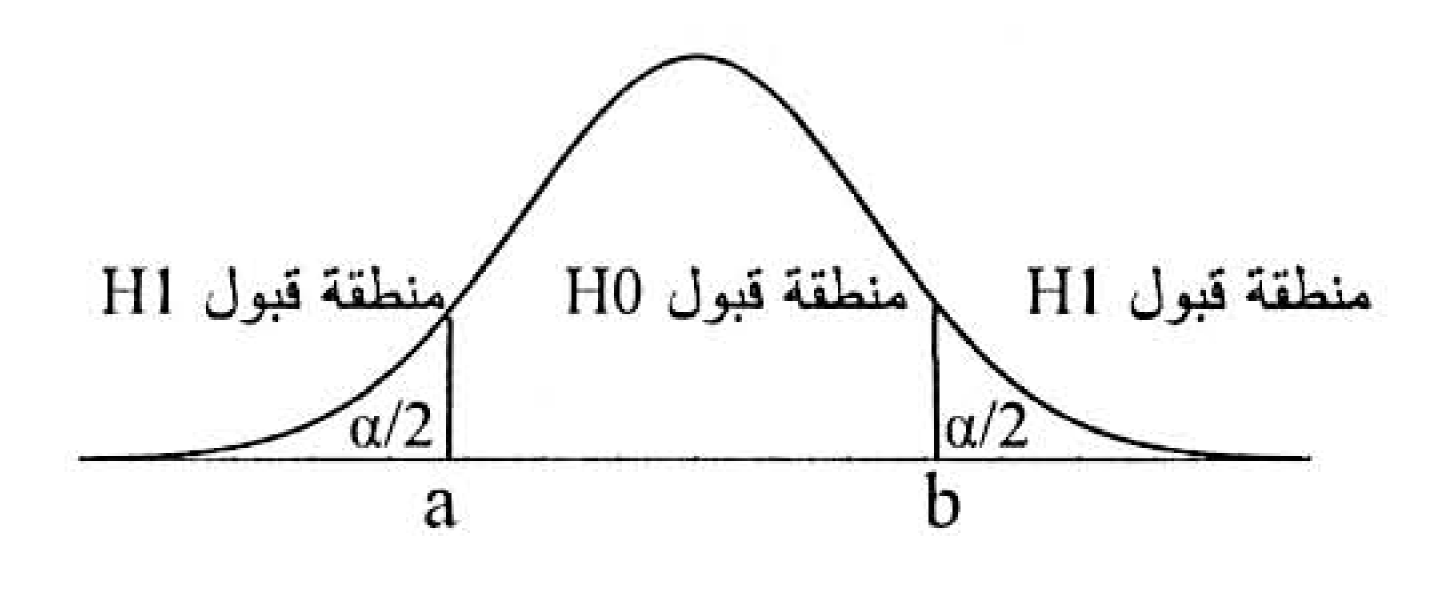
- الخطأ من النوع الأول α هو إحتمال رفض H_0 في حين أنها صحيحة،
- الخطأ من النوع الثاني β إحتمال قبول H_0 في حين أنها خاطئة.

1.2- أنواع الفرضيات:

- **الفرضية البديلة ذات الذيلين:**

وتكون على الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_1: & \mu \neq \mu_0 \\ H_1: & \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$



فإذا كانت G هي دالة الإختبار فإن:

$$P(G<a) = p(G>b) = \alpha/2 \qquad (2.1)$$

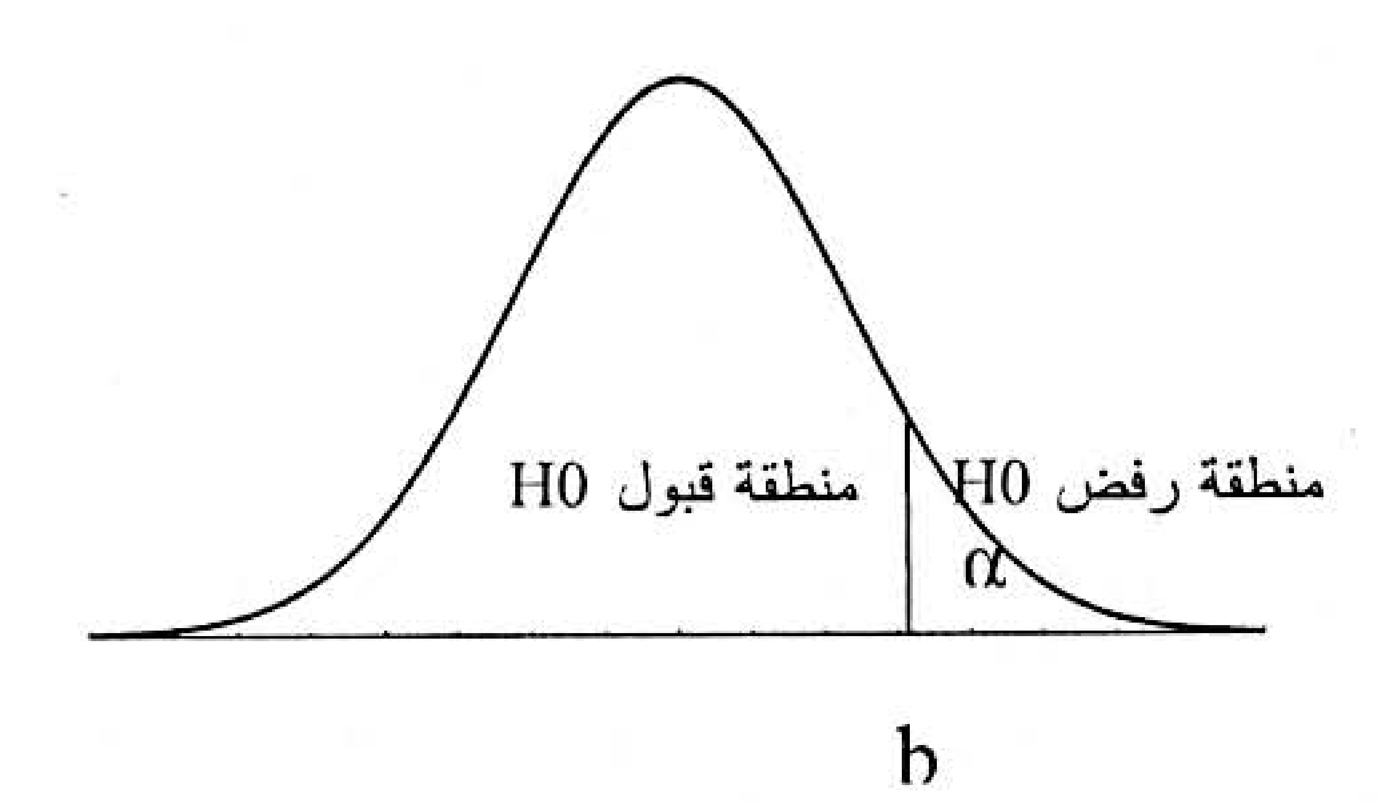
- **الفرضية البديلة ذات الذيل الأعلى:**

وتكون على الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_1: \quad \mu>\mu_0 \\ H_1: \quad \sigma^2> \sigma_0^2 \end{cases}$$

في هذه الحالة تكون α في الطرف الأعلى من توزيع الدالة G ويكون:

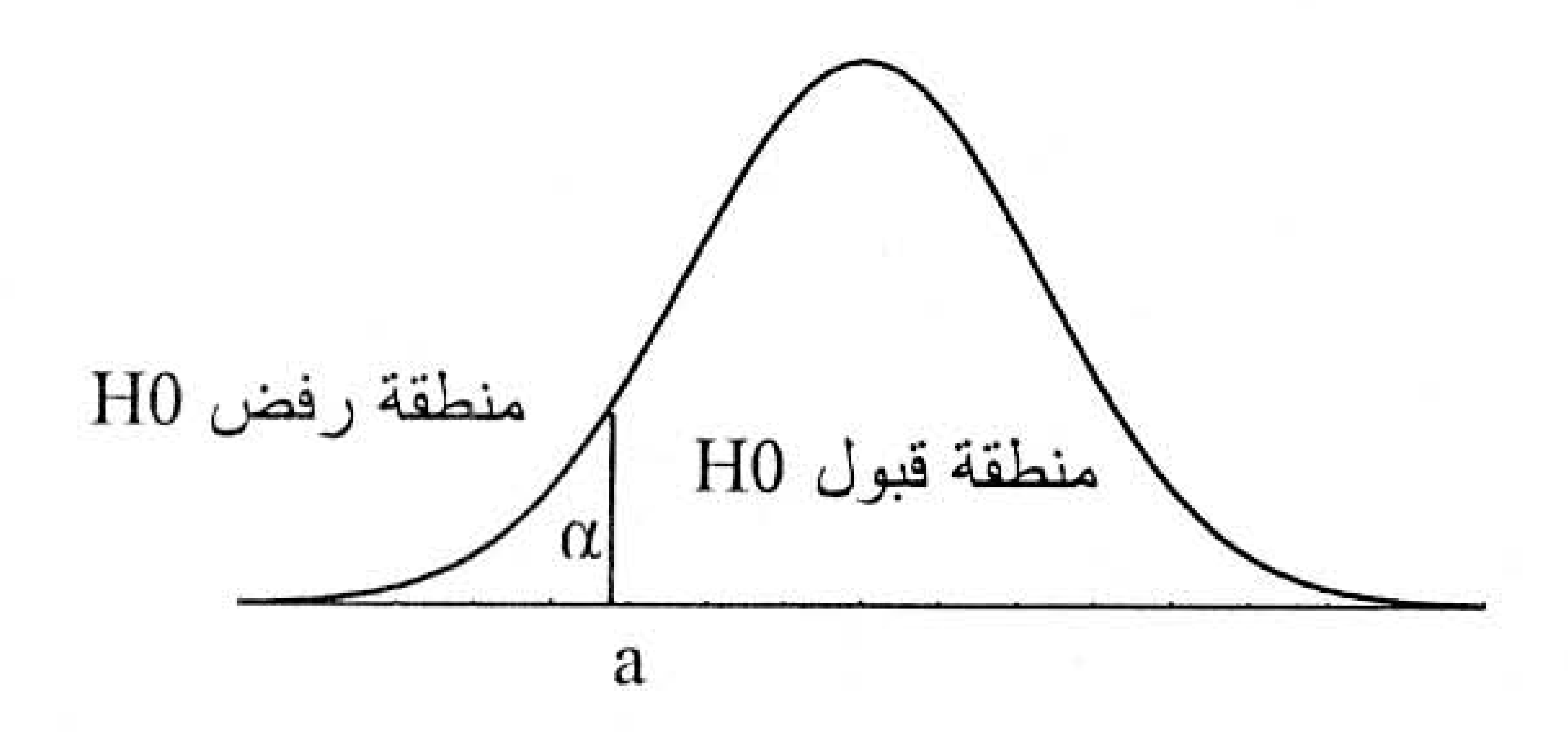
$$p(G>b) = \alpha \qquad (2.2)$$



- **الفرضية البديلة ذات الذيل الأدنى**

$$\begin{cases} H_1: \quad \mu<\mu_0 \\ H_1: \quad \sigma^2< \sigma_0^2 \end{cases}$$

$$p(G<a) = \alpha \qquad (2.3)$$



2.2- إختبار الأوساط الحسابية:

لتكن μ هو المتوسط الحسابي لمجتمع ما، ولتكن μ_0 قيمة إفتراضية لـ μ. نريد أن نختبر عند مستوى دلالة α إذا ما كان:

$$H_0: \quad \mu=\mu_0$$
$$H_1: \quad \mu\neq\mu_0$$

وتكون دالة الإختبار:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu 0}{\sigma \overline{x}} \qquad (2.4)$$

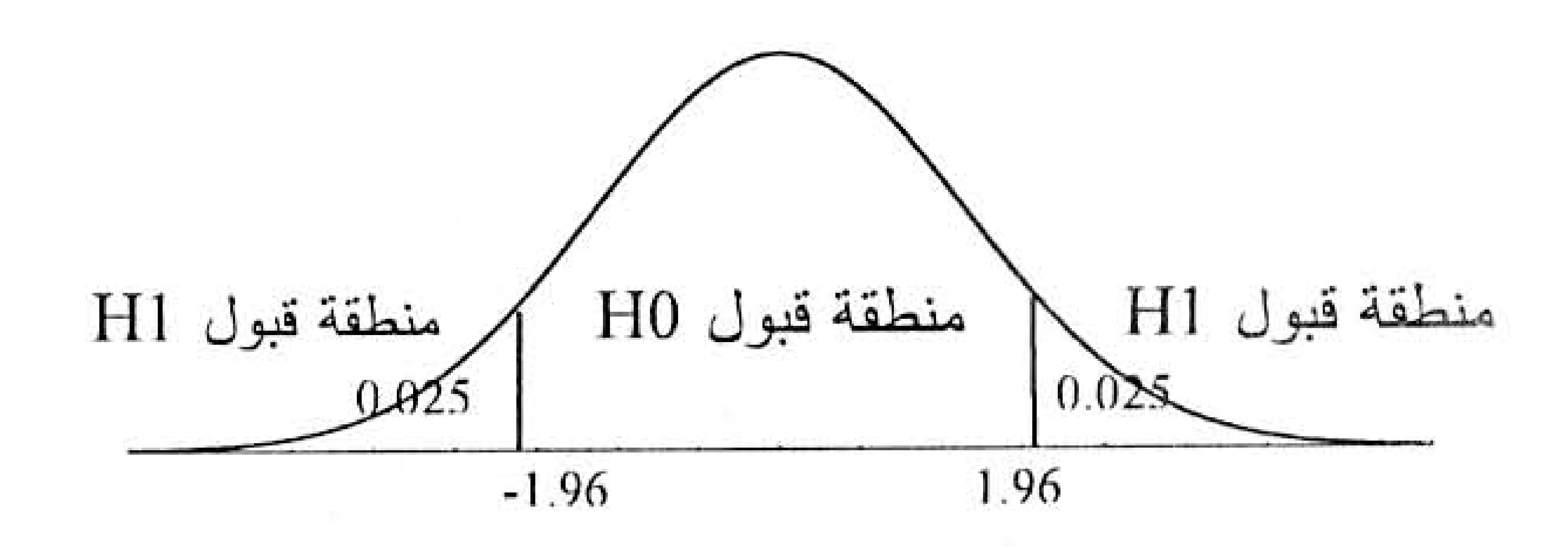
➢ مـــثال:

تنتج شركة كهربائية مصابيح كهربائية، وترغب هذه الشركة في معرفة إذا ما كان يمكنها الإدعاء بأن مصابيحها الكهربائية تستمر 1000 ساعة دون إحتراق. أخذا عينة عشوائية من هذه المصابيح حجمها 100 مصباح ووجدنا أن المتوسط الحسابي للمصابيح دون أن تحترق هو 980 ساعة بإنحراف معياري يساوي 80 ساعة. إختبر إذا ما كان إدعاء الشركة صحيحا عند 5 %= α.

$$H_0: \quad \mu=1000$$
$$H_1: \quad \mu\neq1000$$

وتكون دالة الإختبار:

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu 0}{\sigma_{\overline{x}}}=\frac{\overline{X}-\mu 0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{980-1000}{\frac{80}{\sqrt{100}}}=\frac{980-1000}{\frac{80}{\sqrt{100}}}=-2.50$$



وحيث أن قيمة Z المحسوبة وقعت في منطقة رفض H_0 فإن عمر المصابيح الكهربائية لا يساوي 1000 ساعة.

➢ **مثـــــال 2:**

ترغب شركة أن تعرف بدرجة ثقة 95 % إذا ما كان يمكنها الإدعاء بأن صناديق الصابون المسحوق الذي تنتجه تحتوي على أكثر من 500غ من المادة الفعالة. إذا كانت الأوزان تخضع للتوزيع الطبيعي، أخذنا عينة عشوائية حجمها 25 وحدة ووجدنا أن المتوسط يساوي 520غ، بإنحراف معياري يساوي 50غ. إختبر إذا ما كان المتوسط الحسابي للمجتمع أكبر من 500غ.

➢ **الحــــــل:**

لدينا الفرضيتان التاليتان:

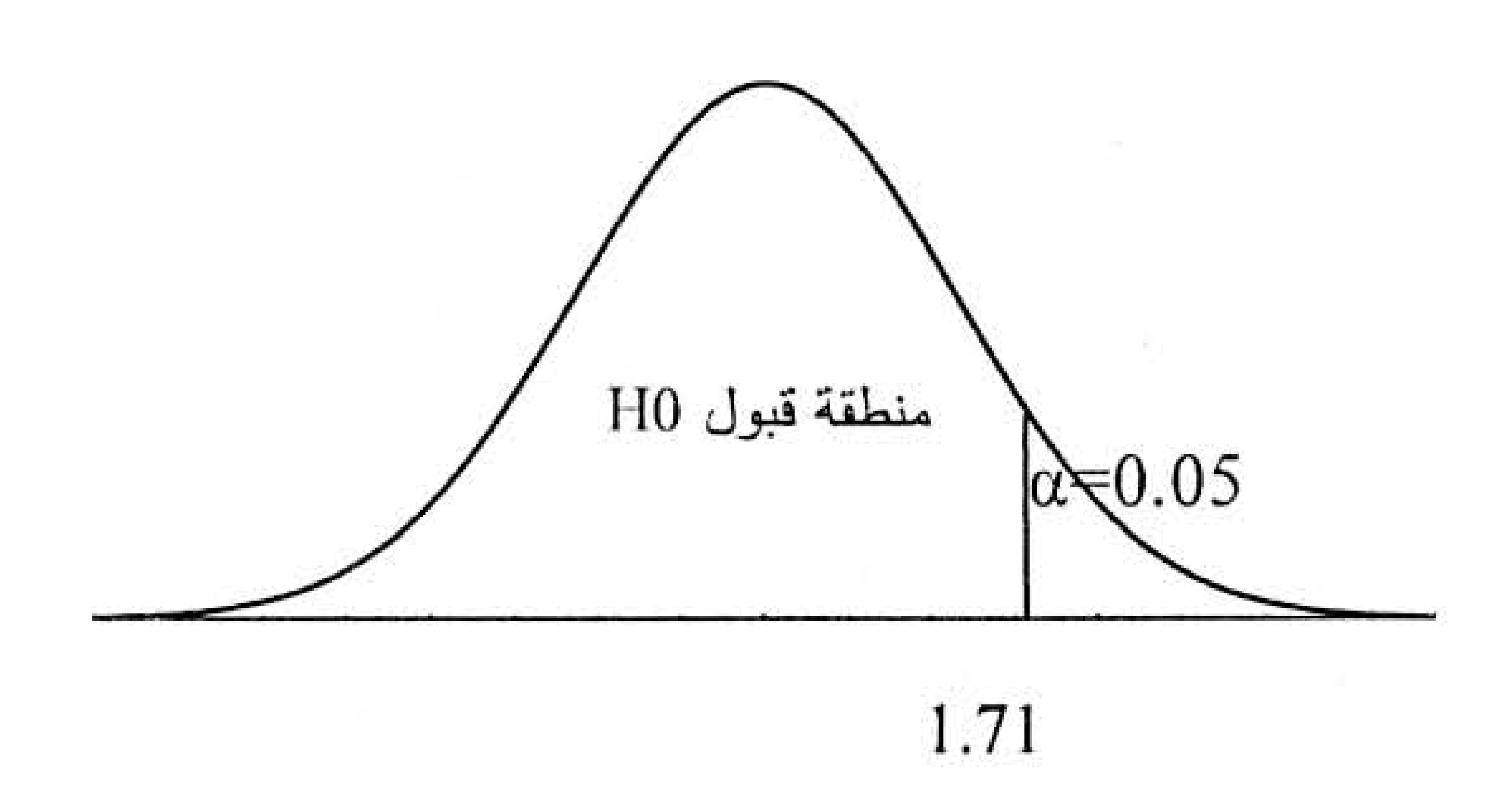
$H_0:\ \mu = 500$

$H_1:\ \mu > 500$

وحيث أن $n<30$ و σ مجهولة فإن دالة الإختبار تخضع لتوزيع t بدرجات حرية 24، ويكون s تقديرا لــ σ:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}} = \frac{520 - 500}{75 / \sqrt{25}} = 1.33$$

وحيث أن t التطبيقية أقل من t النظرية (وقعت في منطقة قبول H_0)، فإن مسحوق الصابون تحتوي على 500غ من المادة الفعالة.



1.2.2- إختبار الفرضيات للفرق بين وسطين:

ليكن $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ متوسطين حسابين لعينتين حجمها على التوالي n_1 و n_2 حيث: n_1 و n_2 أكبر من 30، مأخوذتين من مجتمعين وسطهما على التوالي μ_1 و μ_2، بإنحرافات معيارية σ_1 و σ_2. لإختبار إذا ما كان:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

فإن دالة الإختبار:

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} \qquad (2.5)$$

حيث:

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \qquad (2.6)$$

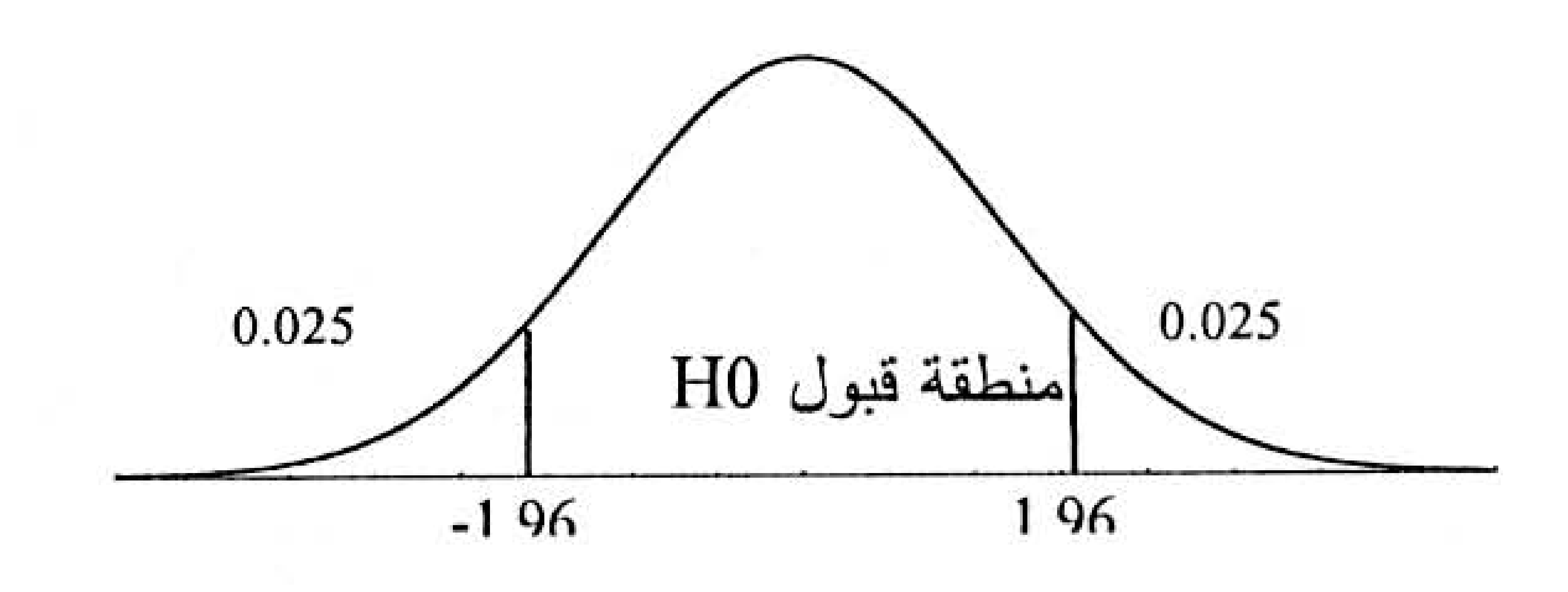
عند مستوى دلالة α.

➢ **مثـــــال:**

يرغب مدير مؤسسة أن يحدد عند مستوى دلالة 5% إذا ما كان الأجر بالساعة للعمال متساويا في مدينتين. أخذنا عينتين عشوائيتين من المدينتين حجمهما على التوالي 40 عاملا و54 عاملا، ووجدنا المتوسط الحسابي للعينة الأولى يساوي 6 دج للساعة وللعينة الثانية هو 5.40دج للساعة، بإنحرافات معيارية هي على التوالي 2دج و 1.80دج. إختبر إذا ما كانت هناك فروق معنوية بين أجور العمال في المدينتين.

➢ **الحـــــل:** لدينا الفرضيات التالية:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$
$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$



$$Z = \frac{\overline{X}1 - \overline{X}2}{\sigma \overline{x}1 - \overline{x}2} = \frac{6 - 5.40}{\sqrt{\frac{2^2}{40} + \frac{1.80^2}{54}}} = 1.5$$

نلاحظ أن قيمة Z النظرية وقعت داخل منطقة قبول H0 وعلية لا توجد فروق معنوية بين المدينتين.

- **إذا كانت n_1 و n_2 أقل من 30:**

تخضع دالة الإختبار في هذه الحالة إلى توزيع t بدرجات حرية $n_2 - 2 + n1$، و يسمى بإختبار العينات الصغيرة، بحيث نفترض أن:

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ ويكون s_1 و s_2 تقديرين لـــσ_1 و σ_2 لأنهما غير معلومتين و s تقديرا لـــ σ

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \qquad (2.7)$$

حيث:

$$s = \sigma = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s^2_1 + (n_2 - 1)s^2_2}{n_1 + n_2 - 2}} \qquad (2.8)$$

➢ **مثـــــال:**

ترغب إدارة الجامعة في معرفة إذا ما كانت هناك فروقا معنوية في نتائج الطلبة المسجلين بجامعتها مع نتائج طلبة جامعة أخرى، في نفس التخصص. أخذت عينتين عشوائيتين حجمهما، 21 طالبا لكل جامعة، وكانت الأوساط الحسابية على التوالي: 78 بانحراف معياري قدره 8 و 74 بانحراف معياري قدره 7. هل توجد فروق معنوية في علامات الطلبة؟.

➢ **الحـــــل:**

لدينا الفرضيات التالية:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$
$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

نقوم بحساب قيمة t التطبيقية، حيث:

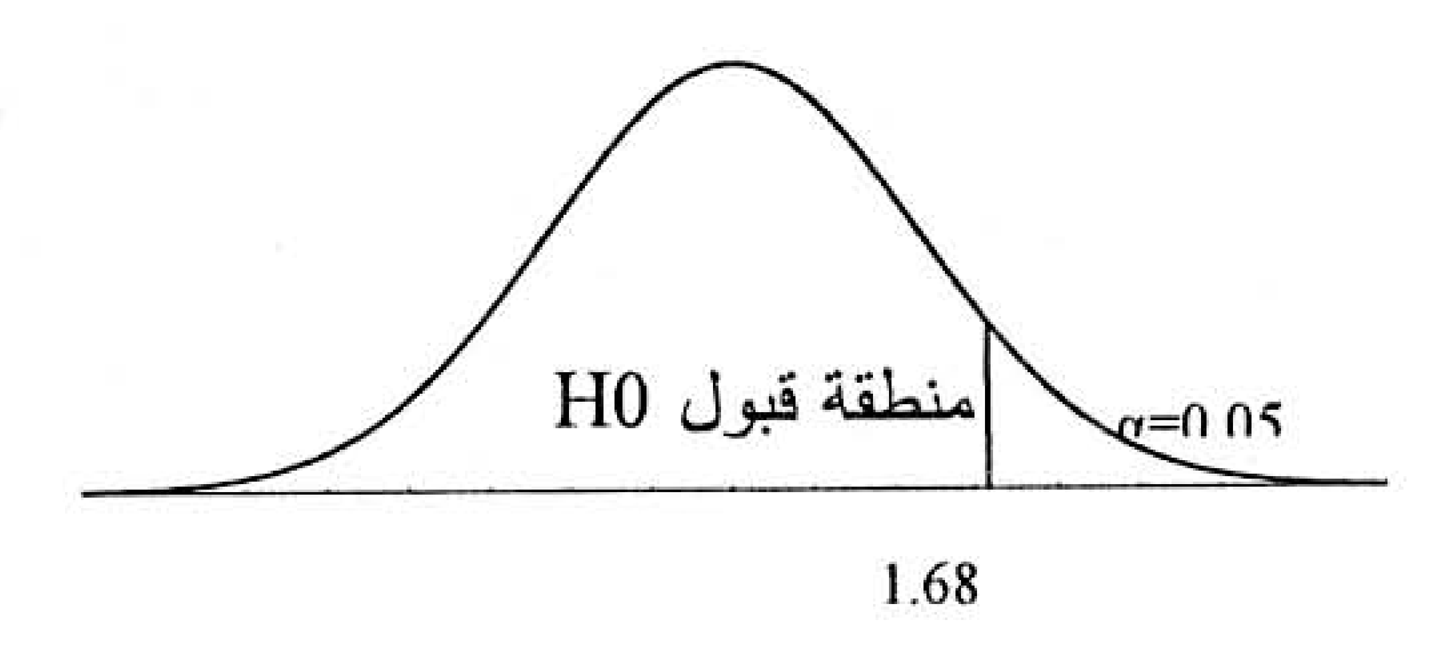
$$t = \frac{\overline{X}1 - \overline{X}2}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n1} + \frac{1}{n2}}} = \frac{78-74}{7.51\sqrt{\frac{1}{21} + \frac{1}{21}}} = 1.72$$

مع: $$s = \sigma = \sqrt{\frac{(21-1)64 + (21-1)49}{40}} = 7.51$$

إن قيمة t النظرية يمكن حسابها من جدول t بدرجات حرية 40 وعند المساحة 0.95 (أو α=0.05)، فنجد:

$$t_{(0.95,40)}=1.68$$

نلاحظ أن قيمة t التطبيقية وقعت خارج منطقة قبول H_0 وبالتالي هناك



فروق معنوية بين الجامعتين.

3.2- إختبار التباين:

لنفترض أنه لدينا مجتمع موزع طبيعيا، بإنحراف معياري σ. نريد أن نختبر إذا ما كان $\sigma = \sigma_0$ مقابل $\sigma_0 > \sigma$ عند مستوى دلالة α. إن هذا الإختبار يخضع لتوزيع كاي تربيع بدرجات حرية n-1، حيث أن:

$$\chi^2 = \frac{ns^2}{\sigma^2} \qquad (2.9)$$

حيث n هي حجم العينة و s^2 هو تباين هذه العينة.

➢ **مثـــــال:**

من الخبرة الماضية وجدنا أن الإنحراف المعياري لمجتمع ما هو 0.25. أخذنا عينةعشوائية حجمها 20 من هذا المجتمع ووجدنا أن إنحرافها المعياري يساوي 0.32. هل لهذا الإرتفاع في الإرتفاع دلالة عند مستوى معنوية 0.05.

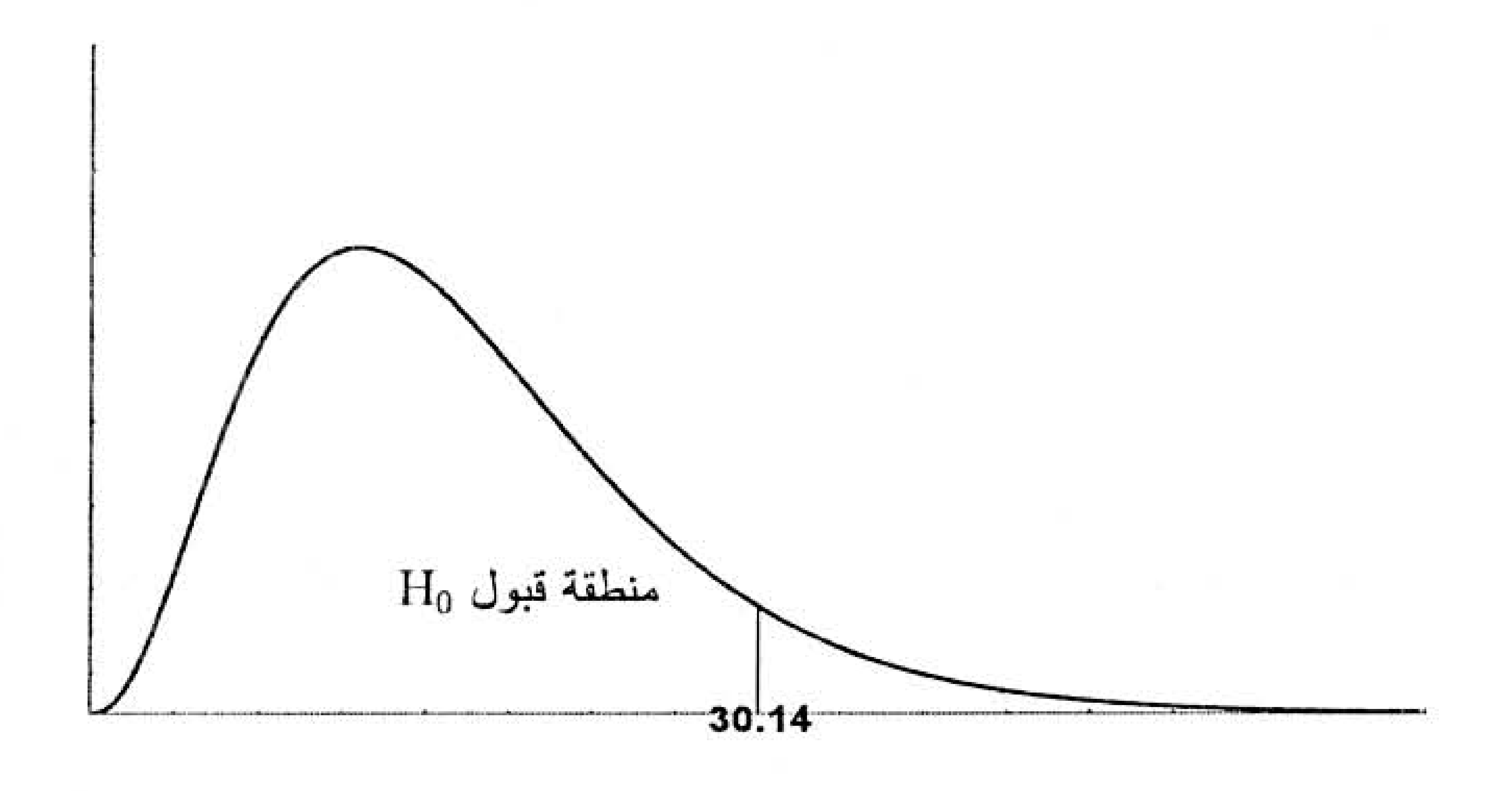
➢ **الحـــــل:**

لدينا الفرضيات التالية:

$$H0:\ \sigma = 0.25$$
$$H1:\ \sigma > 0.25$$

$$= \frac{20x0.32^2}{0.25^2} = 32.8\ \chi^2 = \frac{ns^2}{\sigma^2}$$

وحيث أن χ^2 المحسوبة أكبر من χ^2 النظرية (30.14)، فإننا نرفض الفرضية العدمى وعليه فإنه يوجد زيادة في الإنحراف المعياري.



4.2– إختبار النسبة بين تباينين:

ليكن لدينا مجتمعان موزعين طبيعيا، أخذنا عينتين عشوائيتين منهماحجمهما على التوالي n و m، بانحرفات معيارية، على التوالي: s_1^2 وs_2^2.

نريد إجراء الإختبار التالي:

$$H_0: \sigma_1 = \sigma_2$$
$$H_1: \sigma_1 > \sigma_2$$

إن هذا الإختبار يخضع لتوزيع F، وفق العلاقة التالية:

$$F = \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2}, \qquad (2.10)$$

حيث: $\hat{S}_1^2 = \frac{n_1}{n_1 - 1} S_1^2$ و $\hat{S}_2^2 = \frac{n_2}{n_2 - 1} S_2^2$

➢ مثـــــال:

يعطي أستاذ دروسه لمجموعتين من الطلبة، المجموعة الأولى حجمها 16 طالبا و المجموعة الثانية حجمها 25 طالبا. بعد إجراء الإمتحان وجدنا أن الإنحراف المعياري للمجموعة الأولى هو 9 وللمجموعة الثانية هو 12. هل يوجد فروق معنوية بين التباينين عند مستوى معنوية 0.05.

➢ الحـــــل:

لدينا الإختبار التالي:

$$H_0: \sigma_1 = \sigma_2$$
$$H_1: \sigma_1 > \sigma_2$$

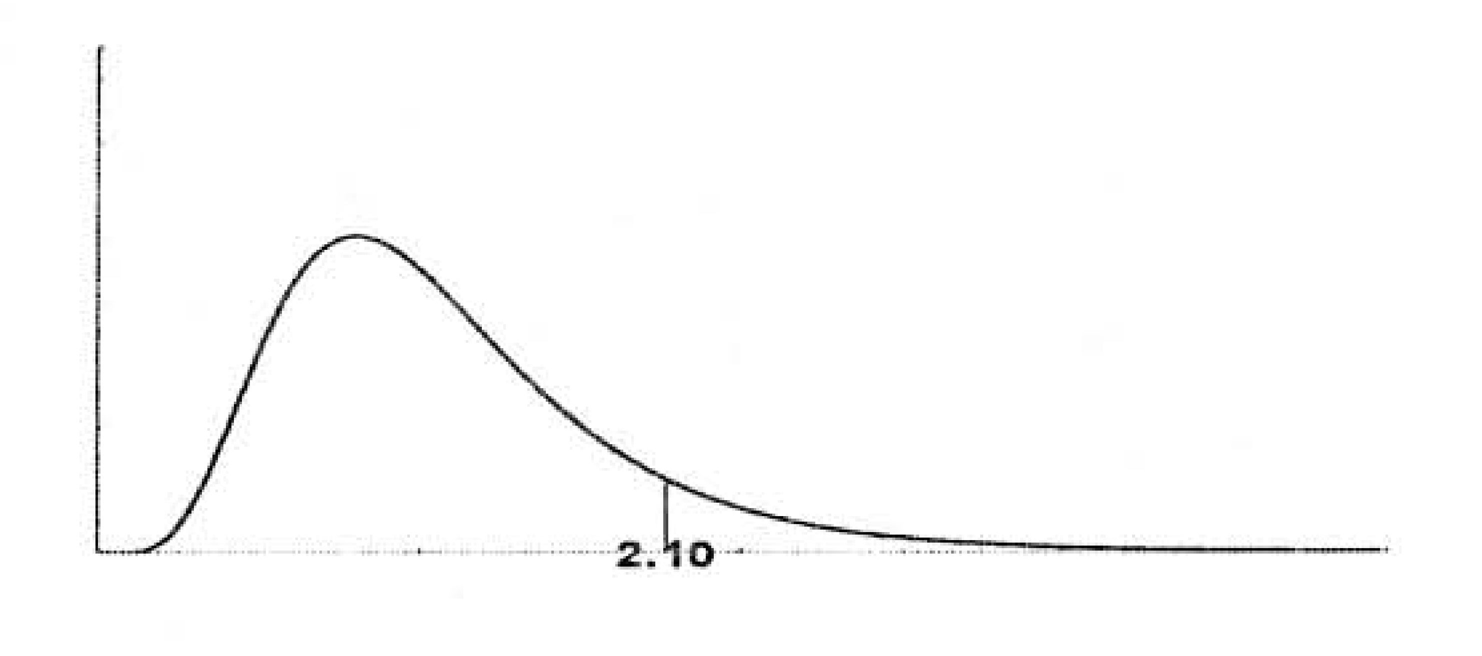
من جهة أخرى:

$$\hat{S}_1^2 = \frac{n_1}{n_1 - 1} S_1^2 = \frac{16}{15}.81 = 86.4$$
$$\hat{S}_2^2 = \frac{n_2}{n_2 - 1} S_2^2 = \frac{25}{24}144 = 150$$

ومنه فإن:

$$F = \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} = \frac{86.4}{150} = 0.58$$

من جدول توزيع F يمكن حساب القيمة النظرية عند المساحة 0.95 ودرجات حرية 15 =v1 و24 =v2 والتي تساوي 2.10. وحيث أن قيمة F النظرية وقعت داخل منطقة قبول H0 فإنه لا توجد فروق معنوية بين



المجموعتين.

5.2– مقارنة بين نسبة نظرية و نسبة مشاهدة:

تعتمد المقارنة بين النسبة النظرية p_0 لعينة مأخوذة من مجتمع والنسبة المشاهدة p لنفس العينة، على حساب قيمة ε التي تعطى بالعلاقة التالية:

$$\varepsilon = \frac{|p - p_0|}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \qquad (2.11)$$

عند مستوى دلالة 0.05،

فإذا كان:

- ε < 1,96: فإنه لا توجد فروق معنوية بين النسبتين عند مستوى معنوية 5%
- ε ≥ 1,96: توجد فروق معنوية بين النسبتين عند مستوى معنوية 5 %،
- ε < 2,576: فإنه لا توجد فروق معنوية بين النسبتين عند مستوى معنوية 1 %،
- ε ≥ 2,576 : توجد فروق معنوية بين النسبتين عند مستوى معنوية 1 %

➢ مثـــــال:

في مجتمع سكاني، 20% مصابون بسرطان الرئة، أخذنا عينة عشوائية من هذا المجتمع حجمها 20 شخص، ووجدنا أن نسبة الإصابة بلغت 34 %. هل توجد فروق معنوية بين النسبة المشاهـــدة والنسبة النظريـــة عند مستـــوى دلالة 0.05.

➢ الحـــــل:

يمكننا حساب قيمة ε وفق العلاقة (2.11):

$$\varepsilon = \frac{|0,34 - 0.20|}{\sqrt{\frac{0,2 \times 0,8}{20}}} = 1.55 < 1,96$$

وهو ما يعني لا وجود لفروق معنوية بين النسبتين عند مستوى دلالة 0.05.

ملاحظة: يمكن إجراء المقارنة باستعمال χ^2، نتحصل على الجدول التالي:

	نسبة المصابين	نسبة الغير مصابين	المجموع
النسب النظرية C_i	% 20	%80	%100
النسب المشاهدة O_i	% 34	%66	% 100

$$\chi^2 = \frac{\sum (O_i - C_i)^2}{C_i} = \frac{(34 - 20)^2}{20} + \frac{(66 - 80)^2}{80} = 12,25$$

$$\chi^2_{(0.95,19)} = 30.14$$

وحيث أن قيمة χ^2 النظرية (من جدول χ^2 عند درجات حرية 19 ومساحة 0.95) أكبر من قيمة χ^2 المحسوبة وفق العلاقة السابقة، فإننا نقبل الفرضية القائلة بأنه لا توجد فروق معنوية بين النسبتين.

6.2- إختبار الفرق بين نسبتين:

إذا كان لدينا النسبتين $\overline{P}_1$ و $\overline{P}_2$ مأخوذتين من عينتين حجمهما على التوالي: n_1 و n_2، من مجتمعين موزعان طبيعيا نسبتهما على التوالي: P_1 و P_2، فإنه يمكن إختبار الفرضيتين التاليتين:

$$H_0: P_1 = P_2$$
$$H_1: P_1 > P_2$$

وتكون دالة الإختبار:

$$Z = \frac{\overline{P}_1 - \overline{P}_2}{\sigma_{P1-P2}} \qquad (2.12)$$

حيث:

$$\sigma_{p1-p2} = \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\dot{p})}{n_1} + \frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n_2}} \qquad (2.13)$$

و

$$\overline{P} = \frac{n_1\overline{P}_1 - n_2\overline{P}_2}{n_1 + n_2} \qquad (2.14)$$

➢ **مثـــــال:**

ترغب شركة في أن تحدد عند مستوى معنوية 0.01 في معرفة إذا ما كان نسبة القبول من المكونات الإلكترونية لمورد أجنبي P_1 تزيد عنها لمورد محلي P_2. أخذت الشركة عينة عشوائية من شحنة كل مورد ووجد ت النسب التالية: 0.9 للمورد الأول، بحجم عينة 100 وحدة و 0.7 للمورد الثاني بحجم عينة 80 وحدة. إختبر إذا ما كانت النسب متساوية.

➢ **الحــــــل:**

$$H_0: P_1 = P_2$$
$$H_1: P_1 > P_2$$

بالمقابل يكون:

$$Z = \frac{\overline{P}_1 - \overline{P}_2}{\sigma_{P1-P2}} = \frac{0.2}{0.06} = 3.33$$

حيث أن:

$$\overline{P} = \frac{n_1\overline{P}_1 - n_2\overline{P}_2}{n_1 + n_2} = \frac{100.0.9 + 80.0.7}{180} = 0.8$$

و

$$\sigma_{p1-p2} = \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\dot{p})}{n_1} + \frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n_2}} = \sqrt{\frac{0.8.0.2}{100} + \frac{0.8.0.2}{80}} = 0.06$$

وحيث أن قيمة Z النظرية تساوي 2.57 أقل من تلك المحسوبة فإننا نرفض H0 لصالح H1، أي أن نسبة المورد الأول أكبر معنويا من نسبة المورد الثاني.

7.2- إختبارات الكاي مربع χ^2

1.7.2– مقارنة بين التكرارات المشاهدة مع التكرارات المتوقعة (اختبارات المطابقة):

تستخدم صيغة الـــ χ^2 في معرفة إذا ما كانت التكرارات المشاهدة الناجمة عن تجربة ما، تطابق التكرارات النظرية (المتوقعة) لهذه التجربة. تكون هذه الصيغة على النحو التالي:

$$\chi^2 = \frac{\sum (fo - fe)^2}{fe} \qquad (2.15)$$

حيث: fo هي التكرارات المشاهدة و fe هي التكرارات النظرية. يجرى الإختبار كما يلي:

هناك تطابق بين التكرارات المشاهدة و التكرارات النظرية: H_0

لا يوجد تطابق بين التكرارات المشاهدة و التكرارات النظرية: H_1

فإذا كانت χ^2 التطبيقية أكبر من χ^2 النظرية (التي تحسب من جدول χ^2 عند مستوى دلالة α و درجات حرية ν). تعطى صيغة دراجات الحرية بالصيغة التالية:

$$\nu = k - m - 1$$

k: عدد الفئات وm هي عدد المعالم الإحصائية (المتوسط الحسابي والإنحراف المعياري) المقدرة في الإختبار.

➢ **مثـــــال:**

وجد محل تجاري من خبرته الماضية أن 30 % من السلعة المباعة هي من الحجم الصغير، 40% هي من الحجم المتوسط و 30 % هي من الحجم الصغير. لتحديد حجم المنتوج الواجب الإحتفاظ به من كل نوع، أخذنا عينة حجمها 100 من المبيعات المقدمة، فوجد أن 20 وحدة هي من النوع الكبير، 40 وحدة هي من النوع المتوسط و 40 وحدة هي من النوع الكبير. إختبر إذا ما كان نمط المبيعات الماضي ما زال سائد ($\alpha = 0.05$).

➢ **الحـــــل:**

لدينا المعطيات التالية:

النمط المشاهد	f0: 20	40	40
النمط الماضي(المتوقع)	fe: 30	40	40

$$\chi^2 = \frac{\sum (fo - fe)^2}{fe} = \frac{(20-30)^2}{30} + \frac{(40-40)^2}{40} + \frac{(40-30)^2}{30} =$$
$$= 5.83$$

وحيث أن: $v = k - m - 1 = 3 - 0 - 1 = 2$

$m = 0$ لأنه لم يتم حساب أي من معالم المجتمع.

من جهة ثانية نحسب χ^2 النظرية من الجدول عند دراجات حرية 2 ومساحة 0.95 فنجد:

$$\chi^2_{\text{النظرية}} = 5.99$$

وحيث أن χ^2 النظرية أكبر من χ^2 التطبيقية فإننا نقبل H_0 أي أن نمط المبيعات الماضي ما زال سائدا.

تستخدم اختبارات الـــ χ^2 كذلك في معرفة طبيعة التوزيع الإحتمالي الذي أخذت منه العينة، هل البيانات المدروسة تتبع التوزيع الطبيعي أم توزيع ذو الحدين أم أي توزيع آخر. و لدراسة ذلك نأخذ المثال التطبيقي التالي:

➢ **مثـــــال:**

قامت وزارة الصحة و السكان بقيام مسح سكاني للعائلات التي لديها 05 أطفال، وقد تم تسجيل الذكور منهم. يمثل الجدول التالي جزء من هذا المسح مجرى على 320 عائلة:

- هل هذه البيانات تخضع لتوزيع ذو الحدين؟.

عدد الأطفال	عدد العائلات
0	8
1	40
2	88
3	110
4	56
5	18
	المجموع : 320

➢ **الحـــــل:**

لدينا:

H_0: البيانات تخضع لتوزيع ذو الحدين

H_1: البيانات لا تخضع لتوزيع ذو الحدين

نقوم بحساب إحتمالات ذو الحدين وفق العلاقة التالية:

$$P(x = k)= C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$P(x = 0)= C_5^0(0.5)^0(0.5)^5 = 0.0312$$
$$P(x = 1)= C_5^1(0.5)^0(0.5)^4 = 0.1562$$
$$P(x = 2)= C_5^2(0.5)^0(0.5)^3 = 0.3125$$
$$P(x = 3)= C_5^3(0.5)^0(0.5)^2 = 0.3125$$
$$P(x = 4)= C_5^4(0.5)^0(0.5)^1 = 0.1562$$
$$P(x = 5)= C_5^5(0.5)^0(0.5)^0 = 0.0312$$

نبحث هن التكرارات المشاهدة و التكرارات المتوقعة و نلخص النتائج في

الجدول التالي:

التكرارات المشاهدة fo	التكرارات المتوقعة (np) : fe
8	320 x 0.0312 = 10
40	320 x 0.1562= 50
88	320 x 0.3125= 100
110	320 x 0.3125 = 100
56	320 x 0.1562 = 50
18	320 x 0.0312 = 10

تكون صيغة الـــ χ^2 كما يلي:

$$\chi^2 = \frac{\sum(fo-fe)^2}{fe} = \frac{(8-10)^2}{10} + \frac{(40-50)^2}{50} +$$
$$\frac{(88-100)^2}{100} + \frac{(110-100)^2}{100} + \frac{(56-50)^2}{50} + \frac{(18-10)^2}{10} = 11.96$$

بالمقابل فإن قيمة الـــ χ^2 النظرية يمكن قراءة من الجدول عند المساحة 0.95 (لأن = 5 % α) وعند درجات حرية:

$$v = k - m - 1 = 6 - 0 - 1 = 5$$

فنجد:

$$\chi^2_{\text{النظرية}} = 11.07$$

وحيث أن $\chi^2_{\text{النظرية}}$ أقل من الـــ $\chi^2_{\text{المحسوبة}}$ فإننا نرفض الفرضية القائلة بأن هذه البيانات تتبع توزيع ذو الحدين.

- **ملاحظة:**

عند إجراء إختبارات المطابقة، يجب التأكد من أن التكرارات المشاهدة f0 أكبر من أو يساوي 5. فإذ لم يكن كذلك فإنه يجب دمج الفئات التي تكرارالها أقل من 5 مع الفئة اللاحقة أو السابقة لها.

➢ **مثـــــال:**

هل البيانات التالية تخضع للتوزيع الطبيعي؟.

حدود الفئات	التكرارات
0.61-1.20	1
1.21-1.80	3
1.81-2.40	4
2.41-3.00	65
3.01-3.60	180
3.61-4.20	328
4.21-4.80	408
4.81-5.40	284
5.41-6.00	83
6.01-6.60	13
6.61-7.20	1
7.21-7.80	1
7.81-8.40	0
8.41-9.00	1
	المجموع: 1372

نلاحظ أن تكرارات بعض الفئات أقل من 5، لذلك يجب دمج هذه الفئات. نتائج هذا الدمج وحساب الإحتمالات المقابلة باستعمال التوزيع الطبيعي مسجلة في الجدول الموالي.

إن حساب الإحتمالات المقابلة تتطلب حساب المتوسط الحسابي والإنحراف المعياري لهذه البيانات، فنجد:

$$\overline{X} = \frac{\sum Xi.fi}{\sum fi} = 4.32 \quad ، \quad \sigma = s = \sqrt{\frac{\sum (Xi - \overline{X})^2.fi}{\sum fi}} = 0.81$$

حدود الفئات	التكرارات	الإحتمالات	التكرارات المتوقعة
أقل من أو يساوي 2.40	8	0.091	0.091x1372=12.5
2.41-3.00	65	0.0435	59.68
3.01-3.60	180	0.1368	187.96
3.61-4.20	328	0.2549	349.72
4.21-4.80	408	0.2814	386.08
4.81-5.40	284	0.1858	254.92
5.41-6.00	83	0.0702	96.31
أكبر من أو يساوي 6.01	16	0.0183	25.11

ويمكن حساب الإحتمالات المقابلة وفق العلاقة التالية:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

فيكون:

$$P(Z \le \frac{2.41 - 4.32}{0.81}) = 0.091$$

$$P(\frac{2.41 - 4.32}{0.81} \le Z \le \frac{3.00 - 4.32}{0.81}) = 0.0435$$

$$P(\frac{3.01 - 4.32}{0.81} \le Z \le \frac{3.60 - 4.32}{0.81}) = 0.1368$$

وهكذا........

نقوم بحساب قيمة الـــ χ^2 وفق العلاقة التالية:

$$\chi^2 = \frac{\sum(fo-fe)^2}{fe} = \frac{(8-1250)^2}{1250} + \frac{(65-59.68)^2}{59.68} + ... = 1346$$

نلاحظ أن:

$$v = k - m - 1 = 8 - 2 - 1 = 5$$

و $\alpha = 0.05$

فيكون: $\chi^2_{\text{النظرية}} = 11.1$

وحيث أن $\chi^2_{\text{النظرية}}$ أقل من الـــ $\chi^2_{\text{المحسوبة}}$ فإننا نرفض الفرضية القائلة بأن هذه البيانات تتبع التوزيع الطبيعي.

- **تصحيح ياتس** Yates:

تستعمل صيغة كاي مربع لإختبار البيانات المتصلة و المنفصلة، فإذا كانت البيانات منفصلة (متقطعة) فإنه يستحسن تحويلها إلى بيانات متصلة من خلال صيغة ياتس المصححة وفق العلاقة التالية:

$$\chi^2_{\text{المصححة}} = \frac{\sum(|fo - fe| - 0.5)^2}{fe} \qquad (2.16)$$

وعموما فإن هذه الصيغة تستخدم عندما تكون درجات الحرية تساوي 1. أما في حالة العينات الكبيرة فإننا نحصل على نتائج مماثلة بين صيغة الكاي مربع العادية و الصيغة المصححة، ولكن قد تنجم بعض الصعوبات بالقرب من القيم الحرجة، لذلك يستحسن إجراء مقارنة بين القيمتين، فإذا كان الفرق كبيرا فإننا نلجأ إلر الرفع من حجم العينة.

➢ **مثـــــال:**

ترمى قطعة نقود 200 مرة، سجلنا 115 مرة ظهور صورة و85 مرة ظهور كتابة. إختبر إذا ما كانت القطعة غير متزنة عند 5%= α.

➢ الحـــــل:

إن هذا الإختبار يخضع لتوزيع ذو الحدين، فإذا كانت القطعة متزنة فإننا نتحصل على:

$$P = 0.5,\ q = 0.5,\ \mu = np = 200x\ 0.5 = 100$$

إذن التكرارات المتوقعة:

$$fe_1 = fe_2 = 100$$

صيغة الـــ χ^2 المحسوبة:

$$\chi^2 = \frac{\sum(fo - fe)^2}{fe} = \frac{(115-100)^2}{100} + \frac{(85-100)^2}{100} = 4.50$$

نلاحظ أن:

$$\nu = k - m - 1 = 2 - 1 = 1$$

و $\alpha = 0.05$

فيكون: χ^2 النظرية $= 3.84$

وحيث أن χ^2 المحسوبة أكبر من χ^2 النظرية فإننا نرفض H_0، أي أن القطعة غير متزنة.

وحيث أن: $\nu = 1$

فإننا نبحث عن قيمة χ^2 المصححة، فيكون:

$$\chi^2 = \frac{\sum(|fo - fe| - 0.5)^2}{fe} = \frac{\sum(|115 - 100| - 0.5)^2}{100} + \frac{\sum(|85 - 100| - 0.5)^2}{100} = 4.20$$

تبقى χ^2 المصححة أكبر من χ^2 النظرية وبالتالي نؤيد القرار السابق، أي أن القطعة غير متزنة.

2.7.2- إختبارات كاي مربع للإستقلال و التجانس:

إن في كثير من الحالات نقوم بمعالجة مجموعة من المشاهدات وفق أسلوبين، أي وفق متغيرين X و Y، بما يعرف بالجداول المتصالبة. من خلال إختبارات الكاي مربع يمكننا معرفة إذا ما كان هناك إستقلال أو إرتباط بين المتغيرين X و Y.

يقوم مبدأ إختبار الكاي مربع على إيجاد مقياس للأخطاء الناجمة عن تقريب القيم المشاهدة بالقيم المتوقعة بفرض الإستقلال، حيث أن:

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i,j}^{n} (fo_{ij} - fe_{ij})^2}{fe_{ij}} \qquad (2.17)$$

حيث أن:

fo_{ij} : عدد المشاهدات المشاهدة الوقعة في السطر الذي ترتيبه i و العمود الذي ترتيبه j

fe_{ij} : عدد المشاهدات المتوقعة الوقعة في السطر الذي ترتيبه i و العمود الذي ترتيبه j

أما قيمة المشاهدات المتوقعة فهي:

$$fe_{ij} = \frac{n_{i+} . n_{j+}}{n} \qquad (2.18)$$

n_{i+}: مجموع أعداد المشاهدات الوقعة في السطر الذي ترتيبه i

n_{j+}: مجموع أعداد المشاهدات الوقعة في العمود الذي ترتيبه j

n : عدد المشاهدات الكلي.

أما درجات الحرية فهي:

v = (عدد الأعمدة - 1)(عدد الأسطر - 1)

➢ مثـــــال:

نريد معرفة تأثير التبغ على القدرة الدراسية لـــ 110 طالب. وقد دونت النتائج في الجدول المتصالب التالي:

- إختبر إذا ما كان هناك تأثير للتبغ على القدرة الدراسية للطالب ($\alpha = 0.05$)

مستوى الطالب / شدة إستهلاك التبغ	ممتاز	متوسط	ضعيف	المجموع
بكثرة	7	18	5	30
متوسط	8	7	15	30
لا يدخن	7	41	2	50
المجموع	22	66	22	110

➢ الحــــــل:

نقوم بوضع الفرضيتين التاليتين:

H_0: X و Y مستقلان

H_1: X و Y غير مستقلين

مستوى الطالب / شدة إستهلاك التبغ	ممتاز	متوسط	ضعيف	المجموع
بكثرة	7 $\frac{22\times30}{110}=6$	18 18	5 6	30
متوسط	8 6	7 18	15 6	30
لا يدخن	7 10	41 30	2 10	50
المجموع	22	66	22	110

نقوم بحساب التكرارات المتوقعة وفق العلاقة (2.18):

$$fe_{11} = \frac{n_{i+} . n_{j+}}{n} = \frac{22x30}{110} = 6$$

$$fe_{12} = \frac{n_{i+} . n_{j+}}{n} = \frac{66x30}{110} = 18$$

$$fe_{i13} = \frac{n_{i+} . n_{j+}}{n} = \frac{22x30}{110} = 6$$

وهكذا لباقي القيم.......

نقوم بحساب χ^2 المحسوبة فنجد:

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i,j}^{n} (fo_{ij} - fe_{ij})^2}{fe_{ij}} = \frac{(7-6)^2}{6} + \frac{(18-18)^2}{18} .... + \frac{(2-10)^2}{10} = 32.55$$

أما درجات الحرية فهي:

v = (عدد الأعمدة - 1)(عدد الأسطر - 1) = $(3-1)(3-1) = 4$

χ^2 النظرية $= 9.48 \ (\alpha = 5\%)$

وحيث أن χ^2 المحسوبة أكبر من χ^2 النظرية فإننا نرفض H_0، أي أن هناك إستقلال بين الظاهرتين وبالتالي لا توجد علاقة بين إستهلاك التبغ و القدرة الدراسية للطالب.

تمارين مختارة

التمرين الأول:

يرغب منتج أسلاك كهربائية إختبار إذا ما كانت هذه الأسلاك لديها قوة مقاومة للكسر تساوي 500 ود؛ فقوة مقاومة أقل لن تكون ملائمة، و قوة مقاومة أكبر سترفع التكاليف. يأخذ المنتج عينة عشوائية حجمها 64 وحدة ووجد أن لديها قوة مقاومة 510 و.د بإنحراف معياري 48. هل يجب أن يقبل المنتج الفرضية بأن لأسلاكه قوة مقومة 500 و.د عند مستوى دلالة 5 %.

التمرين الثاني:

يرغب مشتري أن يقرر عند مستوى دلالة 5%، أي صنف يشتري من صنفين لهما نفس السعر من مصابيح كهربائية. أخذ المشتري عينة عشوائية حجمها 100 مصباح من كل صنف، ووجد أن مصابيح الصنف الأول تعيش في المتوسط 980 ساعة، بإنحراف معياري 80 ساعة، بينما تعيش مصابيح الصنف الثاني في المتوسط 101 ساعة، بإنحراف معياري 120 ساعة. أي الصنفين من المصابيح يجب شراءه إذا كان المشتري يرغب في الوصول إلى قرار عند 5% و 1 %.

التمرين الثالث:

يمثل الجدول التالي توزيع أفراد عينتين من مجتمع إحصائي مصنفين حسب فئات السن و حسب نشاطهم الإقتصادي (بطالين، شغيلين)

فئات السن	العينة A		العينة B	
	بطالون	شغيلون	بطالون	شغيلون
20-30	5	100	20	500
30-40	5	100	25	400
40-50	20	300	30	200
50-60	70	500	35	300
60-70	200	500	40	100

- هل متوسط السن لفئة البطالين يختلف معنويا في العينتين؟،
- هل توجد فروق معنوية للنسب للفئة الشغيلة؟.

التمرين الرابع:

لنفترض أن 50 % من 60 مصنع في المنطقة A تخضع لمراقبة معايير التلوث، في حين أن 40 % فقط من 40 مصنع موجودة في إقليم B تخضع لنفس العملية. هل نسبة المصانع التي تخضع لمراقبة معايير التلوث أكبر معنويا في A عنها في إقليم B؟. خذ 5 %= α

التمرين الخامس:

يمثل الجدول المقابل توزيع عدد مرات قبول 100 طالب من قبل ثلاث جامعات مختلفة. فإذا كان إحتمال قبول طالب ما في جامعة هو 0.4 ؛ إختبر إذا ما كان هذا التوزيع يخضع لذو الحدين (5 %= α)

عدد الطلبة	عدد مرات القبول
25	0
34	1
31	2
10	3

التمرين السادس:

هل البيانات المعطاة في الجدول المقابل تخضع للتوزيع الطبيعي؟.

التكرارات	حدود الفئات
9	0.655-0.965
13	0.965-1.275
15	1.275-1.585
23	1.585-1.895
21	1.895-2.205
10	2.205-2.515
9	2.515 وأكثر

التمرين السابع:

في دراسة إحصائية لنتائج إمتحان مسابقة ما، نريد معرفة إذا ما كانت هناك علاقة بين عامل نجاح الطالب وبين مهنة أب الطالب($\alpha =$% 5) . نتائج هذه الدراسة مدونة في الجدول التالي:

عدد الطلبة الناجحين	عدد الطلبة الممتحنين	مهنة الأباء
180	2244	موظفون
89	988	سلك التعليم
48	575	أعمال حرة
37	423	بنوك
13	287	تجار وحرفيون
17	210	فلاحة
17	209	مؤسسات مصغرة
المجموع:402	المجموع:4936	

- هل يوجد تأثير لمهنة الأباء على قدرة الطالب في النجاح؟.

التمرين الثامن:

أنتج مجمع صيدال نوعين من مسحوق دواء. لإختبار مفعول هذين النوعين ضد مرض معين، أخذت عينة عشوائية مكونة من 100 شخص مصابة بهذا المرض. بعد تلقيح الأشخاص بالنوعين السابقين، دونت النتائج في الجدول التالي، حيث تعطى إشارة + لحالة نجاح الدواء و إشارة — لعدم نجاحه.

عدد المرضى	النوع A	النوع B
35	-	-
5	+	-
15	-	+
45	+	+

- أعد بناء الجدول،
- هل للنوعين من الدواء تأثير على المرض $(\alpha = 5\%)$.

التمرين التاسع:

أرض زراعية مكونة 60 قطعة، قسمت إلى قسمين لكل قسم 30 قطعة. تم تزويد الـ 30 قطعة الأولى بسماد معين، في حين تركت الـ 30 الثانية كشاهد. أعطى إنتاج القسم الأول في المتوسط 18.2 قنطار بإنحراف معياري 0.56 قنطار؛ في حين كان الإنتاج في القسم الثاني 17.5 قنطار بإنحراف معياري 0.43. هل هناك تأثير للسماد على المنتوج الزراعي$(\alpha = 5\ \%)$.؟



الفصل الثالث
نظرية العينات

مقدمة:

تعتمد دراسة المجتمعات أساسا على أخذ كل مفردات المجتمع للتعرف على خصائصه، وكيفية توزيع هذه المفردات وحساب معالمه. ويقصد بالمجتمع، في الدراسات الإحصائية، مجموعة كل المفردات التي تتصف بواحدة أو أكثر من الصفات المميزة و المشتركة. ويمكن أن نميز طريقتين لدراسة مجتمع ما:

أ- طريقة المسح الشامل، حيث تجمع بيانات المجتمع كله دون إستثناء، مثل تعداد السكان،

ب- طريقة العينة، حيث توجد حالات كثيرة يتعذر فيها إستعمال طريقة المسح الشامل، فيلجأ الإحصائي إلى إنتقاء مجموعة من العينات، قصد إنجاز الدراسة، وتطبق نتائج العينة على بيانات المجتمع.

1.3- طرق إختيار العينة:

إن إختيار العينة من تالمجتمع الإحصائي، يخضأ إلى قاعدتين:

- تحديد هدف الدراسة الإحصائية،
- تعميم نتائج العينة على المجتمع الإحصائي.

1.1.3- طريقة العينة العشوائية البسيطة:

تتميز بكونها مجموعة جزئية من المجتمع الإحصائي، وبحجم معين ولها نفس فرصة الإنتقاء (نفس إحتمال الإختيار). ويمكن إختيار العينة العشوائية البسيطة بالطرق التالية:

- **طريقة السحب بدون إرجاء**، أي رفض أي عينة أخذت في قراءة سابقة. إن عدد العينات الممكن تشكيلها في هذه الحالة:

$$C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!} \qquad (3.1)$$

- **طريقة السحب مع الإرجاء**، في هذه الحالة يمكن إختيار عنصر تمت قراءته في سحب سابق. ويكون عدد العينات الممكن تشكيلها في هذه الحالة:

$$C_{N+n-1}^{n} = \frac{(N+n-1)!}{n!(N-1)!} \qquad (3.2)$$

طريقة الأرقام العشوائية:

وهي إحدى الأساليب في الحصول على عينة عشوائية، وذلك بإعطاء رقم لكل مفردة من المجتمع ومن ثم تسحب هذه الأرقام لتعالج بعد ذلك من خلال جداول تسمى جداول الأرقام العشوائية والتي صممت خصيصا لهذه الطريقة.

2.1.3- طريقة العينة الطبقية:

تستخدم هذه الطريقة لزيادة دقة النتائج، وتعتمد على تقسيم المجتمع الإحصائي إلى مجموعات جزئية، تسمى كل مجموعة بالطبقة، ومن كل طبقة يمكن إختيار عينة عشوائية بسيطة.

3.1.3- طريقة العينة العنقودية:

وفيها يقسم المجتمع الإحصائي إلى مجموعات جزئية متصلة بينها في شكل عنقود، ومن كل مجموعة نختار عينة عشوائية بسيطة. مثل تقسيم الولاية إلى دوائر والدوائر إلى بلديات والبلديات إلى أحياء والأحياء إلى عمارات والعمارات إلى سكنات.

4.1.3- طريقة العينة المعيارية:

وتتميز بثبات المتوسط الحسابي، الوسيط والإنحراف المعياري. مثل قياس نسبة نجاح عملية جراحية أجريت على 80 شخص ثم على 60 شخص ثم على 40 شخص. نلاحظ ثبات المقياس بازدياد حجم العينة.

2.3- توزيعات المعاينة للعينة العشوائية البسيطة:

إن الهدف من أية عملية معاينة هي تقدير المعالم الأساسية للمجتمع الإحصائي الكلي(المنوسط الحسابي، الإنحراف المعياري...) عن طريق معالم العينة، ومن ثم حساب المعالم المقابلة لها في المجتمع.

1.2.3- توزيعات المعاينة للأوساط الحسابية:

إذا كانت لدينا مجموعة من العينات مأخوذة من مجتمع ما وسطه الحسابي μ وإنحرافه المعياري σ، فإن معظم الأوساط الحسابية لهذه العينات تختلف عن بعضها. نسمي التوزيع الإحتمالي لمتوسطات هذه العينات بتوزيع المعاينة للوسط الحسابي، ولسوف نجد أن لهذه الأوساط (التوزيع) متوسط حسابي يرمز له بالرمز $\mu_{\bar{x}}$، حيث أن:

$$\mu_{\bar{x}} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \ldots\ldots + \bar{x}_n}{C_N^n} = \mu \qquad (3.3)$$

أما إنحرافه المعياري:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \qquad (3.4)$$

في حالة مجتمع محدود (سحب بدون إرجاع)

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \qquad (3.5)$$

في حالة مجتمع غير محدود (سحب مع الإرجاع).

ولقيم n الكبيرة (n>30) فإن توزيع المعاينة للأوساط الحسابية تقترب من التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu_{\bar{x}}$ وبإنحراف معياري $\sigma_{\bar{x}}$. إن هذه الخاصية في الحقيقية تنطبق على المجتمعات الغير المحدودة والتي تثبت دقة التقريب من التوزيع الطبيعي، وهي حالة خاصة من نظرية النهاية المركزية، التي سترى لاحقا.

➢ مثـــــال:

مجتمع إحصائي حجمه N = 05 يمثل أعمار 05 أطفال هي:
.$X_1=6$, $X_2=8$, $X_3=10$, $X_4=12$, $X_5=14$

لنقسم المجتمع إلى مجموعة من العينات، حجم كل عينة 2 وذلك بالسحب بدون إرجاع. إن عدد العينات اللازم تشكيلها في هذه الحالة هي:

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

وأن: $\mu = \frac{6+8+10+12+14}{5} = 10$

كما أن: $\sigma = 2.82$

العينة	الوسط الحسابي للعينة
(6,8)	7
(6,10)	8
(6,12)	9
(6,14)	10
(8,10)	9
(8,12)	10
(8,14)	11
(10,12)	11
(10,14)	12
(14,12)	13

نجد:

$$\mu_{\bar{x}} = \frac{7+8+9+....+12+13}{10} = 10 = \mu$$

أما الإنحراف المعياري في حالة مجتمع محدود:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{2.82}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{5-2}{5-1}} = 1.73 \neq \sigma$$

• **حالة عينتين من مجتمعين مستقلين:**

إذا كانت $X_1, X_2......X_n$ عينة مأخوذة من توزيع وسطه الحسابي μ_1 وانحرافه المعياري σ_1، وكانت $Y_1, Y_2...Y_n$ عينة أخرى من توزيع أخر وسطه الحسابي μ_2 وانحرافه المعياري σ_2، فإنه يمكن الحصول على توزيع الفروق للأوساط الحسابية وفق العلاقة التالية:

$$\mu_{\bar{x}} - \mu_{\bar{y}} = \mu_1 - \mu_2$$

أما الإنحراف المعياري لهذا الفرق فيعرف بالعلاقة التالية:

في حالة مجتمع غير محدود:

$$\sigma_{\bar{x}-\bar{y}} = \sqrt{\sigma^2_{\bar{x}} + \sigma^2_{\bar{y}}} = \sqrt{\frac{\sigma^2_1}{n_1} + \frac{\sigma^2_2}{n_2}} \qquad (3.6)$$

في حالة مجتمع محدود:

$$\sigma_{\bar{x}-\bar{y}} = \sqrt{\sigma^2_{\bar{x}} + \sigma^2_{\bar{y}}} = \sqrt{\frac{\sigma^2_1}{n_1}\cdot\frac{N_1-n_1}{N_1-1}} + \sqrt{\frac{\sigma^2_2}{n_2}\cdot\frac{N_2-n_2}{N_2-1}} \qquad (3.7)$$

➢ **مثـــــال:**

أخذت عينة حجمها 30 وحدة من توزيع وسطه الحسابي 75 و تباينه 25، وأخذت عينة ثانية حجمها 60 من توزيع أخر مستقل وسطه الحسابي 60 وتباينه 15. أوجد الفروق للوسط الحسابي والإنحراف المعياري لتوزيع المعاينة للتوزيعين.

➢ **الحــــــل:**

بما أن المجتمعين غير محدودين فإن:

$$\mu_{\bar{x}} - \mu_{\bar{y}} = 75 - 60 = 15$$

أما الفروق بين التباينين:

$$\sigma_{\bar{x}-\bar{y}} = \sqrt{\frac{25}{30} + \frac{15}{60}} = 1.04$$

- **نظرية النهاية المركزية:**

إذا كان حجم العينة كبيرا $(n>30)$ فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي يقترب من التوزيع الطبيعي، بغض النظر عن شكل المجتمع الأصلي. لذلك يمكن حساب إحتمال أن يكون $\overline{X}$ لعينة عشوائية داخل فترة معينة من خلال حساب القيمة الإحصائية لـــ Z وفق العلاقة الشهيرة التالية:

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu_{\overline{x}}}{\sigma_{\overline{x}}} \qquad (3.8)$$

➢ **مثـــــال:**

صممت إحدى الشركات سيارة بحيث أن أكبر حمولة لها هي 3000كغ وتتسع إلى 30 راكبا. إذا علمت أن الأوزان تخضع للتوزيع الطبيعي الذي وسطه 70كغ وانحرافه المعياري 54.77. أحسب إحتمال أن تحمل هذه السيارة أكثر من حمولتها.

➢ **الحـــــل:**

نلاحظ أن: $\overline{X}=\frac{3000}{30}=100$ والمطلوب إيجاد: $P(\overline{x}>100)$

لدينا:

$$P(\overline{x}>100)=P(\frac{\overline{x}-\mu\overline{x}}{\sigma\overline{x}}>\frac{100-70}{\frac{54.77}{\sqrt{30}}})=$$

$$P(z>3)=0.5-0.4987=0.0013$$

- **حالة مجتمعين مستقلين:**

إذا كانت $X_1, X_2......X_n$ عينة مأخوذة من توزيع وسطه الحسابي μ_A وانحرافه المعياري σ_A، وكانت $Y_1, Y_2...Y_n$ عينة أخرى من توزيع أخر مستقل

وسطه الحسابي μ_B وانحرافه المعياريσ_B، فإننا يمكن إيجاد القيمة الإحصائية Z وفق العلاقة التالية:

$$Z = \frac{(\overline{X}_A - \overline{X}_B) - \mu_{\bar{x}A - \bar{Y}B}}{\sigma_{\bar{x}A - \bar{Y}B}} \qquad (3.9)$$

➢ مثـــال:

تنتج الشركة A مصابيح كهربائية متوسط مدة حياتها 1400 ساعة، بانحراف معياري 200 ساعة، وتنتج الشركة B مصابيح مماثلة متوسط مدة حياتها 1200 ساعة بانحراف معياري 100 ساعة. قمنا باختيار عينة عشوائية حجمها 125 وحدة من كل شركة. أوجد إحتمال أن الشركة A تنتج مصابيح كهربائية متوسط مدة حياتها على أكبر من الشركة B بـــ:

- 160ساعة، 250 ساعة.

➢ الحـــل:

نلاحظ أن:

$$\mu_{\bar{x}A - \bar{x}B} = \mu_{\bar{x}A} - \mu_{\bar{x}B} = 1400 - 1200 = 200$$

$$\sigma_{\bar{x}A - \bar{x}B} = \sqrt{\sigma^2_{\bar{x}A} + \sigma^2_{\bar{x}B}} = \sqrt{\frac{\sigma^2_A}{n_A} + \frac{\sigma^2_B}{n_B}} = \sqrt{\frac{200^2}{125} + \frac{100^2}{125}} = 20$$

إذن إحتمال أن الشركة A تنتج مصابيح كهربائية متوسط مدة حياتها على أكبر من الشركة B بـــ 160ساعة هو:

$$P((\overline{X}_A - \overline{X}_B) > 160) = P\left(\frac{(\overline{X}_A - \overline{X}_B) - \mu_{\bar{x}A - \bar{Y}B}}{\sigma_{\bar{x}A - \bar{Y}B}} > \frac{160 - 200}{20}\right)$$
$$= P(z > -2) = 0.5 + 0.4772 = 0.9772$$

وإحتمال أن الشركة A تنتج مصابيح كهربائية متوسط مدة حياتها على أكبر من الشركة B بـــ 250 ساعة هو:

$$P((\overline{X}_A - \overline{X}_B) > 250) = P\left(\frac{(\overline{X}_A - \overline{X}_B) - \mu_{\bar{x}A - \bar{Y}B}}{\sigma_{\bar{x}A - \bar{Y}B}} > \frac{250 - 200}{20}\right) =$$
$$P(z > 2.50) = 0.5 - 0.4938 = 0.0062$$

2.2.3- المعاينة باستعمال توزيع t:

إذا كان حجم العينة صغيرا (n<30) فإنه يمكن إستخدام توزيع t كبديل للتوزيع الطبيعي. ويمكن حساب إحتمال أن $\overline{X}$ لعينة عشوائية، داخل فترة معينة، من خلال حساب القيمة الإحصائية لـــ t وفق العلاقة:

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_{\overline{x}}}{S_{\overline{x}}} \quad \text{بدرجات حرية } n-1 \qquad (3.10)$$

➢ مثـــــال:

تخضع علامات طلبة معهد ما للتوزيع الطبيعي بوسط حسابي 70. أخذت عينة عشوائية حجمها 16 طالبا بإنحراف معياري 8. أحسب إحتمال أن تزيد علامات الطلبة عن 78 درجة.

➢ الحــــل:

المطلوب هو حساب:

$$P(\overline{x} > 74) = P(\frac{\overline{x} - \mu_{\overline{x}}}{S_{\overline{x}}} > \frac{74 - 70}{\frac{8}{\sqrt{16}}}) = P(t > 2) = 0.025$$

عند درجات حرية 15 نجد المساحة 0.975

2.2.3- توزيعات المعاينة للتباينات:

إذا كانت $x_1, X_2......X_n$ عينة مأخوذة من توزيع وسطه الحسابي μ وتباينه σ^2، وكان s^2 هو تباين هذه العينة بحيث σ^2 معلومة، فإن تباين العينة يخضع لتوزيع كاي مربع وفق العلاقة:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \quad \text{بدرجات حرية } n-1 \qquad (3.11)$$

➢ مثـــــال:

إذا كانت $X_1, X_2,...X_n$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي $N(\mu,9)$ تباينها S^2. أوجد النقطة c بحيث يكون: $P(S^2 \leq c) = 0.95$.

➢ الحـــــل:

$$P(S^2 \leq c) = P(\frac{n-1}{\sigma^2}.S^2 \leq \frac{c(n-1)}{\sigma^2})$$

$$= P(\chi^2_9 \leq \frac{c(10-1)}{9}) = 0.95 \Rightarrow P(\chi^2_9 \leq c) = 0.95$$

وبإستعمال جدول الكاي مربع نجد: $c = 16.91$

- **حالة σ مجهولة:**

إذا كانت $X_1, X_2......X_n$ عينة مأخوذة من توزيع وسطه الحسابي μ وتباينه σ^2، وكان s^2 هو تباين هذه العينة بحيث σ^2 مجهولة، فإن تباين العينة يخضع لتوزيع t وفق العلاقة:

$$t = \frac{X-\mu}{S/\sqrt{n-1}} \quad \text{بدرجات حرية } n-1 \qquad (3.12)$$

3.2.3- توزيعات المعاينة للنسب:

لنفترض أنه لدينا مجتمع غير محدود، به جميع العينات الممكنة ذات حجم n، ولكل عينة نسبة النجاح p حيث أن $p + q = 1$ ، فإن توزيع المعاينة للنسب يكون بمتوسط μ_p و إنحراف معياري σ_p، حيث:

$$\mu_p = p$$
$$\sigma_p = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \qquad (3.13)$$

أما إذا كان المجتمع محدود (المعاينة بدون إرجاع) فإن العلاقة تصبح كما يلي:

$$\mu_p = p$$
$$\sigma_p = \sqrt{\frac{pq}{n}}.\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \qquad (3.14)$$

➢ مثـــــال:

ترمى قطعة نقود متزنة 120 مرة. أوجد إحتمال الحصول ما بين 40% و60% صورة.

➢ الحـــــل:

إن إحتمالات النجاح (الحصول على صورة)هي ½ = P وإحتمالات الفشل (الكتابة) هي ½ = q ؛ وحيث أن n≥30 فإن إحتمالات ذو الحدين تقترب من التوزيع الطبيعي، ويكون:

$\%60 \times 120 = 72$ و $\%40 \times 120 = 48$

أي المطلوب حساب $P(48 \leq X \leq 72)$ ؛ و بما أننا نقوم بعملية تقريب توزيع منفصل إلى توزيع متصل فإن الإحتمال السابق يأخذ الشكل التالي:

$$P(47.5 \leq X \leq 72.5)$$

لدينا:

$$\mu p = np = 120.1/2 = 60$$
$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{120.1/2.1/2} = 5.48$$

ومنه:

$$P(47.5 \leq X \leq 72.5) = P\left(\frac{47.5-60}{5.48} \leq Z \leq \frac{72.5-60}{5.48}\right) =$$
$$P(-2.28 \leq Z \leq 2.28) = 0.9774$$

تمارين مختارة

التمرين الأول:

مجتمع مكون من 12000 عنصرا بوسط حسابي 100 وإنحراف معياري 60. أوجد الوسط الحسابي والإنحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابي، عندما يكون حجم العينة 100.

التمرين الثاني:

مجتمع مكون 3000 إمرأة متوسط أعماره 25 سنة. فإذا كانت أوزان هؤلاء النسوة تتبع التوزيع الطبيعي بوسط 58 كغ وإنحراف معياري 4، أخذت 80 عينة عشوائية حجمها 25 إمرأة لكل عينة. أوجد المتوسط الحسابي والإنحراف المعياري لتوزيع المعاينة، وذلك في حالة:

- السحب بدون إرجاع - السحب بالإرجاع

التمرين الثالث:

إذا كان متوسط وزن 500 كرة هو 5.02 كغ، بإنحراف معياري 0.3 كغ. أخذت عينة عشوائية حجمها 100؛ أوجد إحتمال أن يكون وزن الكريات:

- محصورا بين 496 و500 كغ؛ - أكبر من 510 كغ

التمرين الرابع:

بينت الإحصائيات في بلد ما أن 64% من السكان يملكون سيارة سياحية. أخذت عينة عشوائية مكونة من 225 شخص؛ أوجد إحتمال أن نسبة الذين يملكون سيارة سياحية: - محصورا بين 0%4 و 70 %، - أكبر من 60 %، - أقل من 25 %.

التمرين الخامس:

ماكنة صناعية مختصة في إنتاج قطع حديد دائرية متوسط قطرها 25مم. بعد مدة أصاب الماكنة عطل وتم تصليحه؛ أخذت عينة عشوائية من منتوج

الماكنة بعد تصليحها وتم قياس الأقطار المنتجة فكانت النتائج كما يلي (بالملم): 22، 23، 21، 25، 24، 22، 26، 21. هل يمكن الجزم بأن الماكنة مازالت تعمل بشكل جيد، عند إحتمال 95 % ، بفرض أن أقطار القطع تتبع التوزيع الطبيعي؟.

التمرين السادس:

أظهرت دراسة طبية وجود نوعين من مرض الروماتيزم، الإلتهابي وغير الإلتهابي؛ من أصل 220 مصاب بمرض الروماتيزم، وجد أن 167 شخص مصابون بالنوع الإلتهابي.

- أعطي تقديرا نقطيا وتقديرا بمجال لنسبة الأشخاص المصابون بالنوع الإلتهابي، قامت هذه الدراسة بتحليل عامل المناعة X في دم المصابين بالنوعين من المرض، فكانت النتائج كما يلي:

	النوع الإلتهابي	النوع الغير الإلتهابي
ΣX	420	104
ΣX^2	1400	292

- أوجد مجال الثقة لمتوسط عامل المناعة X ($\alpha = 10\%$) لدى النوعين من المرض. ما ذا تقترح؟.

التمرين السابع:

ينتج مصنعا للأدوية نوعا من الدواء يحتوي على مادة فعالة، و يجب أن تكون هذه المادة محددة بشكل دقيق. و لدراسة هذه الدقة، قمنا بتحليل عينة حجمها 25 حبة. أحسب إحتمال أن لا يزيد الإنحراف المعياري لكمية هذه المادة في الحبوب عن 1.30 غ، علما أن الإنحراف المعياري لوزن المادة الفعالة في إنتاج المصنع كله هو 1.20غ.

الفصل الرابع
التقديـــــــــر

مقدمة:

تعتمد التوزيعات الإحصائية على معالم، فمثلا يعتمد التوزيع الطبيعي على المعلمتين μ و σ، ويعتمد توزيع بواسون على المعلمة λ، أما توزيع ذو الحدين فيعتمد على P (إحتمالات النجاح)؛ وعادة ما تكون هذه المعالم مجهولة، وليس من السهل إيجادها، ولذلك نلجأ إلى تقدير هذه المعالم.

1.4- معايير جودة التقدير:

ا)- عدم التحيز:

نقول عن المقدار $\tilde{a}_k$ أنه يعتبر تقديرا غير متحيزا لـــ a فيما إذا كان التوقع الرياضي لـــ $\tilde{a}_k$ يساوي a أي:

$$E(\tilde{a}_k) = a \qquad (4.1)$$

حيث k يرمز إلى جميع التقديرات الممكنة المأخوذة من جميع العينات الممكنة ذات الحجم n.

أما إذا كان:

$$E(\tilde{a}_k) \neq a \qquad (4.2)$$

فإن المقدار $\tilde{a}_k$ أنه يعتبر تقديرا متحيزا لـــ a أي أنه لا يمثل المقدار a تمثيلا صحيحا.

فمثلا متوسط توزيع المعاينة للأوساط يساوي متوسط المجتمع أي: $\mu_x = \mu$، في حين يكون متوسط العينة $\overline{X}$ هو تقدير غير متحيز لمتوسط المجتمع.

➢ **مثـــــال:**

قمنا بقياس أقطار شجرة ما وو جدنا النتائج التالية:

6.33, 6.37, 6.36, 6.37, 6.37 (m)

أوجد تقديرات غير متحيزة للمتوسط الحقيقي و التباين الحقيقي.

➢ **الحـــــل:**

إن التقدير غير المتحيز للمتوسط هو:

$\overline{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{31.75}{5} = 6.35$ وهو تقديرا غير متحيز لمتوسط المجتمع μ

أما التباين:

$S^2 = \frac{\sum (X-\overline{X})^2}{n-1} = 0.00055$ فيكون $S = \sqrt{0.000555} = 0.023$ هو تقدير متحيز لـــ σ لأنه لا يمثل تباين المجتمع تمثيلا صحيحا.

ب)- التماسك:

نقول عن المقدار $\tilde{a}_k$ أنه يعتبر تقديرا لـــ a فيما إذا كان:

$$\lim_{n \to N(\infty)} P(\tilde{a}_k \to a) = 1 \qquad (4.3)$$

حيث P يرمز إلى الإحتمال، أي أنه كلما كبر حجم العينة فإننا نحصل على أفضل تقدير للمقدار a، و هو ما يدعى بالتماسك.

➢ **مثـــــال:**

في حالة توزيعات المعاينة، رأينا أن متوسط متوسط العينات المسحوبة $\mu_{\bar{x}}$ ما هو إلا متوسط المجتمع μ ولذلك فإن هذا المتوسط يعتبر تقديرا متماسكا لمتوسط المجتمع.

ج)- الفعالية:

إذا كان للمقدار a عددا كبيرا من التقديرات الفعالة و المتماسكة، فإن التقدير الفعال (الذي يجب إختياره) هو ذو التباين الأصغر أي أن:

$$\text{Var}(\tilde{a}_k) = \frac{\sum_{k=1}^{M} (a_k - a)^2}{M} \to \text{Min} \qquad (4.4)$$

2.4- التقدير النقطي:

وهي أبسط طرق التقدير وتتمثل في تقدير المعلمة بقيمة واحدة، كأن نقول أن متوسط دخل أفراد أسرة ما هو 300 دينار، فيكون $\overline{X}300 =$ هو تقدير نقطي لمتوسط المجتمع.

3.4- التقدير بمجال:

تنطوي عملية التقدير بنقطة عن بعض الأخطاء، لهذا فإننا نحتاج إلى بعض المعومات الخاصة عن مدى إنحراف هذا التقدير عن قيمة المعلمة. نكون في هذا الحالة قد كونا مجال معين تتغير فيه قيمة المعلمة تحت إحتمال معين.

1.3.4- مجالات الثقة للأوساط الحسابية:

لا حظنا أن $\overline{X}$ هو تقدير لـــ μ، و حيث أن $\overline{X}$ هو متوسط حسابي لعينة، فإن تقدير μ بـــ$\overline{X}$ تنشأ عنه أخطاء.

إذا كانت $X_1, X_2,....X_n$ عينة عشوائية مأخوذة من توزيع طبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ فإن $\overline{X}$ يخضع للتوزيع الطبيعي $N(\mu,\sigma^2/n)$ حيث:

$$P(-2 \le Z \le +2) = P(-2 \le \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le +2) = 0.95$$

$$P(-2\frac{\sigma}{n} \le \overline{X}-\mu \le +2\frac{\sigma}{n}) = P(\mu - 2\frac{\sigma}{n} \le \overline{X} \le \mu + 2\frac{\sigma}{n}) = 0.95$$

فيكون مجال تقدير $\overline{X}$ هو $\left[\mu-2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu+2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$، و حيث أن μ هي قيمة مجهولة وأن $\overline{X}$ هو تقدير نقطي لـــ μ فإن لـــ μ هو:

$$\left[\overline{X}-2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}+2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \quad (4.5)$$

➢ مثـــــال:

أخذت عينة حجمها 30 بمتوسط حسابي 22، فإذا كانت العينة مأخوذة من توزيع طبيعي $N(\mu,45)$، فما هو مجال الثقة لمتوسط المجتمع الذي أخذت منه العينة؟.

➢ الحـــــل:

بتطبيق العلاقة (4.5) نجد:

$$\left[22-2\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{30}},22+2\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{30}},\right]=[19.55,24.44]$$ بإحتمال قدره 95.45 %

- نظريـــة:

إذا كانت $X_1, X_2,\ldots X_n$ عينة عشوائية مأخوذة من توزيع طبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ حيث σ^2 معلومة، فإن مجال الثقة $(1-\alpha)\%$ للمتوسط الحسابي $\overline{X}$ هو:

$$\overline{X}\pm Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (4.6)$$

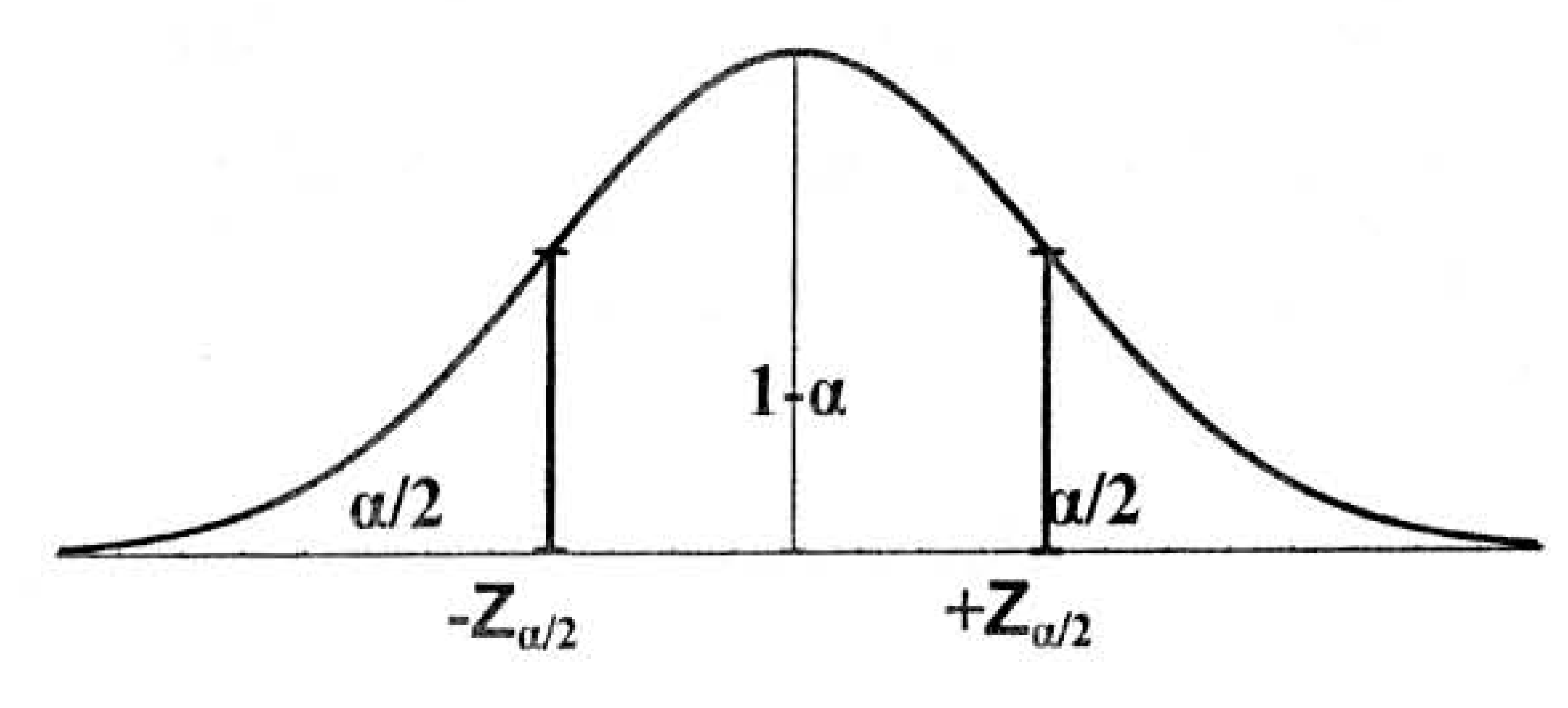
وبصفة عامة يمكن أن نكتب القوانين السابقة كما يلي:

$$P(-Z_{\alpha/2} \le Z \le +Z_{\alpha/2}) = P(-Z_{\alpha/2} \le \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le +Z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

$$P(\overline{X} - Z_{\alpha/2}.\sigma_{\overline{X}} \le \mu \le \overline{X} + Z_{\alpha/2}.\sigma_{\overline{X}}) = 1-\alpha$$

$$\mu \in \left[\overline{X} - Z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}}, \overline{X} + Z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}}\right]$$

حيث أن: $P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1-\alpha/2$



فتكون قيم $Z_{\alpha/2}$ حسب قيم α هي:

$\alpha = 1\% \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 2.58$

$\alpha = 5\% \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1.96$

$\alpha = 10\% \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1.65$

- **حالة $n < 30$:**

ويمكن أن نميز:

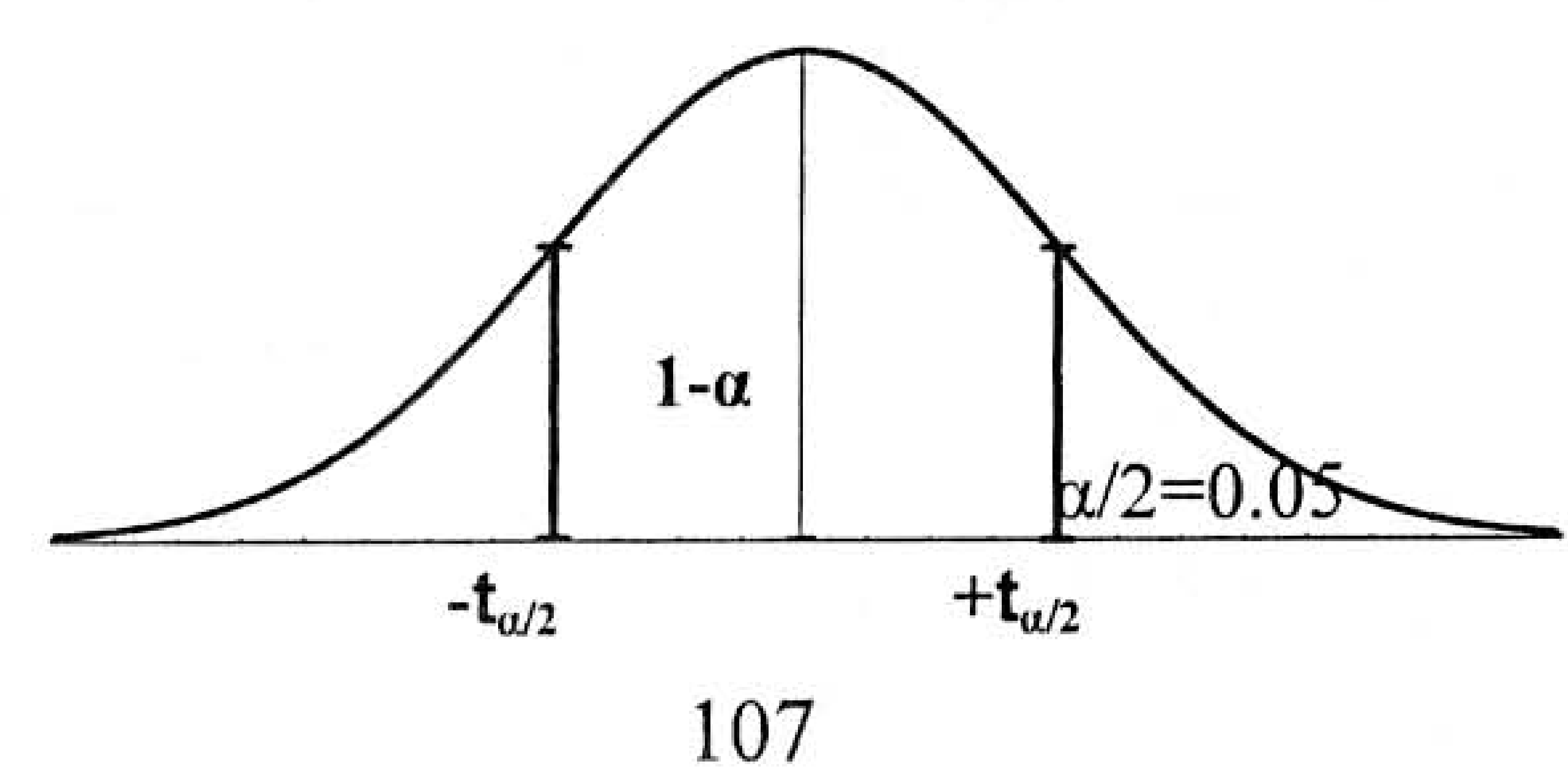
– إذا كانت σ معلومة، فإن مجال الثقة للمتوسط الحسابي هو:

$$\overline{X} \pm Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (4.7)$$

– إذا كانت σ مجهولة، فإننا نستخدم S كتقدير لها، و يكون مجال الثقة للمتوسط الحسابي هو:

$$\overline{X} \pm t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \qquad (4.8)$$ بدرجات حرية $n-1$

غير أن العلاقة (4.8) تستخدم حتى في حالة $n \geq 30$ عندما تكون σ مجهولة.



➢ مثـــــال:

عينة عشوائية حجمها 16 مفردة مأخوذة من $N(\mu,\sigma^2)$، فإذا كان المتوسط الحسابي للعينة هو 14.5 بتباين 25، فأوجد مجال الثقة 90% لمتوسط المجتمع.

➢ الحـــــل:

حيث أن $n < 30$ فإن مجال الثقة في هذه الحالة:

$$\overline{X} \pm t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{5}{4}$$

$$t_{\alpha/2} = t_{0.10/2} = t_{(0.05,15)} = -t_{(0.95,15)} = -1.753$$

فيكون:

$$14.5 \pm 1.75 \frac{5}{4} = [12.3, 16.7]$$

أي أن: $\mu \in [12.3, 16.7]$

• **تقدير الفرق بين وسطين:**

إذا كانت $\overline{X}$ متوسط حسابي لعينة عشوائية حجمها n_1 مأخوذة من مجتمع1، وكانت $\overline{Y}$ متوسط حسابي لعينة عشوائية أخرى حجمها$n2$ وكانت مأخوذة من مجتمع2، حيث أن σ_1 و σ_2 معلومتين؛ فإن مجال الثقة للفرق بين وسطين هو:

$$(\overline{X} - \overline{Y}) \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma^2_1}{n_1} + \frac{\sigma^2_2}{n_2}} \qquad (4.9)$$

أما إذا كانت σ_1 و σ_2 مجهولتين، فإننا نستخدم، على التوالي $S1$ و $S2$ كتقدير لهما وذلك بإستعمال توزيع t، فيكون:

$$(\overline{X}-\overline{Y}) \pm t_{\alpha/2} Sc\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} \qquad (4.10)$$

بدرجات حرية n1+n2-1

حيث:

$$Sc = \frac{(n_1-1)s^2_1+(n_2-1)s^2_2}{n_1+n_2-2}$$

2.3.4- تقدير النسب:

إذا كانت $X_1, X_2....X_n$ عينة عشوائية مأخوذة من مجتمع يخضع لتوزيع ذو الحدين، وكانت p هي نسبة النجاح (إحتمالات النجاح)، فإن مجال الثقة للنسبة P (المجتمع) هي:

$$p \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = p \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \qquad (4.11)$$

حيث: P المجتمع التي هي مجهولة.

إذا كان حجم المجتمع N معلوم فإن المعادلة (4.9) تأخذ الشكل التالي:

$$p \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}.\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \qquad (4.12)$$

➢ **مثـــــال:**

قمنا بمسح إحصائي لتقدير نسبة الذكور في مدينة ما، أخذت عينة عشوائية حجمها 300 شخص ووجد أن عدد الذكور هو 123. أوجد مجال الثقة 95 % لنسبة الذكور في المجتمع.

لدينا:

$$p = \frac{123}{300} = 0.41$$

ومنه:

$$\overline{p} \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 0.41 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.41x0.59}{300}} = [0.36,0.46]$$

3.3.4- تقدير الفرق بين نسبتين:

بنفس الطريقة المتبعة في تقدير الفرق بين وسطين، يمكن تقدير الفرق بين نسبتين فق العلاقة التالية:

$$(p_1 - p_2) \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} \qquad (4.13)$$

حيث:

P_2: نسبة العينة الأولى، P_2 هي نسبة العينة الثانية.

2.3.4- مجالات الثقة للتباينات:

ا)- مجال الثقة لتباين المجتمع:

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots X_n$ عينة عشوائية مأخوذة من توزيع طبيعي $N(\mu,\sigma^2)$، فإن مجال الثقة $(1-\alpha)\%$ لتباين المجتمع:

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2(1-\alpha/2, n-1)} \quad , \quad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2(\alpha/2, n-1)}\right] \qquad (4.14)$$

حيث S^2 هو تباين العينة و χ^2 هو المتغير العشوائي كاي مربع.

➢ **مثـــــال:**

أخذنا عينة عشوائية حجمها 10 ووجد أن تباينها يساوي 117.12. أوجد مجال 95% الثقة لتباين المجتمع.

➢ **الحـــــل:**

لدينا:

$$\chi^2(1-\alpha/2,\ n-1) = \chi^2(0.95,9) = 19.02$$
$$\chi^2(\alpha\alpha/2\ n-1) = \chi^2(0.025,9) = 2.70$$

ومنه، مجال الثقة:

$$\left[\frac{9x117.12}{19.02} \quad , \quad \frac{9x117.12}{2.70}\right] = [55.41 \ , 390.4\ ]$$

ب)- مجال الثقة للنسبة بين تباينين:

إذا كانت $X_1, X_2,....X_n$ عينة عشوائية مأخوذة من توزيع طبيعي $N(\mu1,\sigma^21)$ و كانت $Y1, Y2,....Yn$ عينة أخرى عشوائية مأخوذة من توزيع طبيعي $N(\mu2,\sigma^22)$، فإن مجال الثقة $(1-\alpha)\%$ للنسبة $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ هي:

$$\left[\frac{S^2_2}{S^2_1}.F_{(\alpha/2, n1-1, n2-1)} \quad , \quad \frac{S^2_2}{S^2_1}.F_{(1-\alpha/2, n1-1, n2-1)} \right] \qquad (4.15)$$

حيث S^2_1 و S^2_2 هما تبايني العينتين على التوالي، F هو المتغير العشوائي فيشر.

تمارين مختارة

التمرين الأول:

أخذت عينة عشوائية مكونة من 25 مفردة بمتوسط 80، وإنحـــراف معياري 30، من مجتمع حجمه 1000 مفردة ويتبع التوزيع الطبيعي. أوجد مجال الثقة 90 % لمتوسط المجتمع.

التمرين الثاني:

لمعرفة تأثير نوع من الأقراص المنومة على الإنسان، أخذ طبيب مجموعتين من الأشخاص حجمهما على التوالي 50 و100؛ أعطيت المجموعة الأولى أقراص النوع الجديد، فكان متوسط النوم هو 7.82 ساعة بإنحراف معياري 0.24 ساعة؛ في حين أعطيت المجموعة الثانية الأقراص العادية (التقليدية) فكان متوسط النوم هو 6.75 ساعة بإنحراف معياري 0.30 ساعة.

- أوجد مجالات الثقة 90 % و99 % للفرق بين متوسط ساعة النوم الناتجة عن إستخدام النوعين من الأقراص.

التمرين الثالث:

نريد تقدير النسبة P لمجموعة من السلع الإستهلاكية التي تحمل علامة مميزة مأخوذة من مجتمع حجمه 50 مليون وحدة إنتاجية.

ا)- نختبر أولا 100 وحدة إستهلاكية، أخذت عشوائيا، ووجدنا أن 5 وحدات تحمل علامة مميزة.

- أوجد مجال الثقة للنسبة P (α =% 5).

ب)- نفرض أن المجال المحسوب في الفقرة أ معتبرا، من أجل ذلك نأخذ عينة معتبرة كذلك، ولنفرض أن النسبة P_0 هي نفسها المحسوبة في الفقرة أ.

- ما هو حجم العينة اللازم أخذه إذا أردنا تقدير النسبة P ‏($\alpha =$ 1 %)،
- أوجد عندئذ إحتمال المجال الجديد I' حيث أن $I'=2I$.

التمرين الرابع:

يرغب مدير مؤسسة في تقدير متوسط عدد الساعات التي يأخذه العمال لإنجاز عمل ما في حدود ± 3، بمجال ثقة 90 %. فإذا كان الإنحراف المعياري يساوي 15، فماهو حجم العينة اللازم أخذه (عدد الساعات).

التمرين الخامس:

ماكنة صناعية مختصة في إنتاج قطع حديد دائرية قطرها d. فإذا كان قطر القطع يخضع للتوزيع الطبيعي بإنحراف معياري 1 مم. أخذت عينة عشوائية من منتوج الماكنة حجمها 9 وتم قياس الأقطار المنتجة فكانت النتائج كما يلي (بالمم): 20.1، 19.9، 20، 19.8، 19.7، 20.2، 20.1، 23.1، 22.8. أوجد مجال الثقة 95 % لمتوسط أقطار القطع المنتجة؟.

التمرين السادس:

أخذت عينتان حجمهما على التوالي 10 و18 من مجتمعين موزعين طبيعيا. فإذا كان تباين العينة الأولى هو 30 و تباين العينة الثانية هو 25، فأوجد مجال الثقة 95 % للنسبة بين تبايني المجتمعين اللذين أخذت منهما هاتان العينتان.



الفصل الخامس
نظرية الإرتباط

مقدمة:

تنقسم الظواهر إلى قسمين: ظواهر مسببة وظواهر ناتجة. إن نظرية الإرتباط، كفرع من فروع علم الإحصاء، تهتم بدراسة العلاقات الإرتباطية المختلفة بين الظواهر المسببة والظواهر الناتجة، بهدف الوصول إلى صيغة رياضية (نموذج رياضي) تعبر عن العلاقة المفروضة. وتتجلى أهمية هذه النظرية في المجالات الإقتصادية المختلفة ومجالات العلوم الطبيعية، حيث تقدم الأدوات الرياضية اللازمة لإتخاذ القرارات المناسبة.

1.5- أنواع العلاقات الإرتباطية:

نرمز بـــ X للظاهرة المسببة وبالرمز Y للظاهرة الناتجة. وتكون العلاقة بينهما إما على شكل:

- **علاقات تابعية و ارتباطية:**

حيث يكون مقابل كل متغير مستقل X قيمة مقابلة لـــ Y (المتغير المرتبط). فمثلا الصيغة $L = 2\pi R$ هي علاقة إرتباطية بين محيط الدائرة ونصف قطرها R، لأن π مقدار ثابت.

- **علاقة طردية أو عكسية:**

إن كلا من العلاقة الإرتباطية بين ظاهرتين يمكن أن تكون طردية (كلما ازدادت قيم X ازدادت قيم Y)، أو عكسية (أي إذا ازدادت قيم X نقصـــت قيم Y).

• **علاقات مستوية أو منحنية:**

تكون العلاقة الإرتباطية إما مستقيمة، تكون فيها تزايد الظاهرة Y على تزايد الظاهرة X ثابتة، أو منحنية حيث تكون هذه النسبة غير ثابتة.

2.5- الارتباط البسيط:

إن الإرتباط البسيط يختص فقط في البحث عن العلاقة الإرتباطية بين ظاهرتين فقط، أحدهما تكون الظاهرة الناتجة Y و الأخرى الظاهرة المسببة X. ينقسم الإرتباط البسيط إلى نوعين أساسين، هما الإرتباط المستقيم و الإرتباط المنحني.

1.2.5- الإرتباط المستقيم و تمثيله:

يعبر عن الإرتباط المستقيم بين المؤشرين X وY بمعادلة مستقيم من الشكل:

$$Y^* = a_0 + a_1 X \qquad (5.1)$$

وللتأكد من أن هذه العلاقة هي إرتباط مستقيم، فإنه يجب رسم شكل الإنتشار للنقاط التي إحداثياتها (X_i, y_i) الذي يجب أن يأخذ شكل الخط المستقيم.

1.1.2.5- طريقة المربعات الصغرى:

لتكن السلسلة الإرتباطية للظاهرتين X وY لكل منهما القيم الحقيقية التالية:

$$X = \{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_i\}$$
$$Y = \{y_1, y_2, \ldots\ldots, y_i\}$$

إن القيم الممثلة بواسطة معادلة المستقيم

$$Y^* = a_0 + a_1 X$$

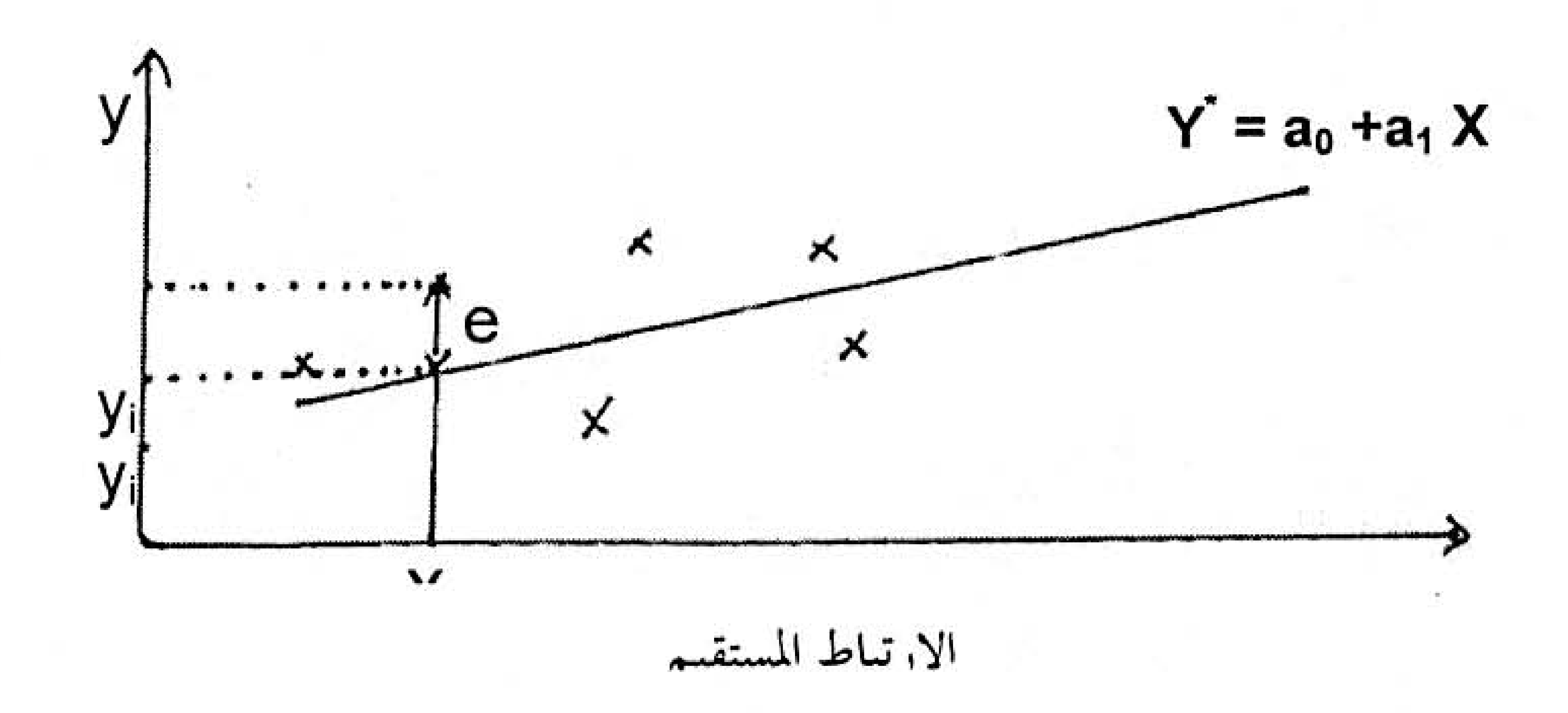
تسمى بالقيم التقديرية، و هي تلك الواقعة على خط المستقيم، بتعويض قيم X_i في المعادلة.

إن المعادلة (5.1) تعكس العلاقة الإرتباطية بشكل تقريبي، لذلك فإنه من الطبيعي وجود سلسة من المفروقات بين القيم الحقيقية والقيم التقديرية، وعليه يمكن تمثيل المعادلة (3.1) بالشكل التالي:

$$Y^* = a_0 + a_1 X + \varepsilon \qquad (5.2)$$

حيث: $\sum \varepsilon i = 0$

من هذا نكتب:



الارتباط المستقيم

$$Y^* = f(x) + \varepsilon$$
$$X_i = \{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_i\}$$
$$Yi = \{y1, y2, \ldots\ldots, y_i\}$$
$$\varepsilon i = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_i\}$$

إن المبدأ الأساسي لطريقة المربعات الصغرى يكمن في كون:

$$\varepsilon = \sum \left(y_i - y_i^*\right) = 0 \text{ ،}$$

أي:

$$\sum \left(y_i - y_i^*\right)^2 \longrightarrow \text{Min} \quad (5.3)$$

والتي تعبر عن مجموع مربعات فروق القيم الحقيقية عن القيم التقديرية.
لدينا:

$$\left(\sum\left(y_i - y_i^*\right) = 0\right.$$

$$\sum\left(y_i - a_1 x_i - a_0\right) = 0$$

$$\sum y_i - \sum a_1 x_i - \sum a_0 = 0$$

$$\sum y_i - a_1 \sum x_i - n a_0 = 0$$

حجم العينة :n

$$\sum y_i - a_1 \sum x_i = n a_0 \Rightarrow a_0 = \frac{\sum y_i}{n} - a_1 \frac{\sum x_i}{n}$$

$$\Rightarrow a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{X} \quad \text{..........} (3.4)$$

$$\sum\left(y_i - y_i^*\right)^2 = \sum\left(y_i - a_1 x_i - a_0\right)^2$$

$$= \sum\left(y_i - a_1 x_i - \bar{y} + a_1 \bar{x}\right)^2$$

$$= \sum\left[\left(y_i - \bar{y}\right) - a_1\left(x_i - \bar{x}\right)\right]^2$$

حيث أن: $\bar{X}$ المتوسـط الحسابي لقيم X و $\bar{Y}$ يمثل المتوسط الحسابي لقيم Y.

بالتعويض نجد قيمة

$$a_1 = \frac{\sum\left(y_i - \bar{y}\right)\left(x_i - \bar{x}\right)}{\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

$$a_1 = \frac{\frac{\sum\left(y_i - \bar{y}\right)\left(x_i - \bar{x}\right)}{n}}{\frac{\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{N}} = \frac{Cov(x, y)}{Var(x)} \quad (5.4)$$

حيث أن $Cov(x,y)$ هو التباين المشترك أو التغاير و $Var(x)$ يمثل تباين قيم X.

- **طريقة أخرى لحساب** a_0 و a_1:

لدينا:

$$Yi^* = a_0 + a_1 Xi$$

نجمع وفق قيم i فتحصل على ما يلي:

$$\sum Yi = na_0 + a_1 \sum X_i \ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

نضرب المعادلة الأصلية في Xi ثم نجمع وفق قيم i:

$$\sum XiYi = a0 \sum Xi + a_1 \sum Xi2 \ldots\ldots 2$$

تتشكل لدينا جملة معادلة ذات مجهولين a_0 و a_1.

$$\left.\begin{array}{l} \sum Y_i = na_0 + a_1 \sum X_i \\ \sum X_i Yi = a0 \sum_{Xi} + a_1 \sum X_i^2 \end{array}\right\} \qquad (5.5)$$

تحل هذه الجملة بإحدى الطرق الرياضية (المقارنة، التعويض أو المصفوفات).

ملاحظة: إذا قسمنا أطراف المعادلة (5.5) على n فإننا نحصل على ما يلي:

$$\overline{Y} = a_0 + a_1 \overline{X} \qquad (5.6)$$

أي أن المستقيم الذي نبحث عنه يمر من النقطة $(\overline{X} ، \overline{Y})$. هذه الخاصية يتميز بها الإرتباط المستقيم.

2.1.2.5- معامل الإرتباط:

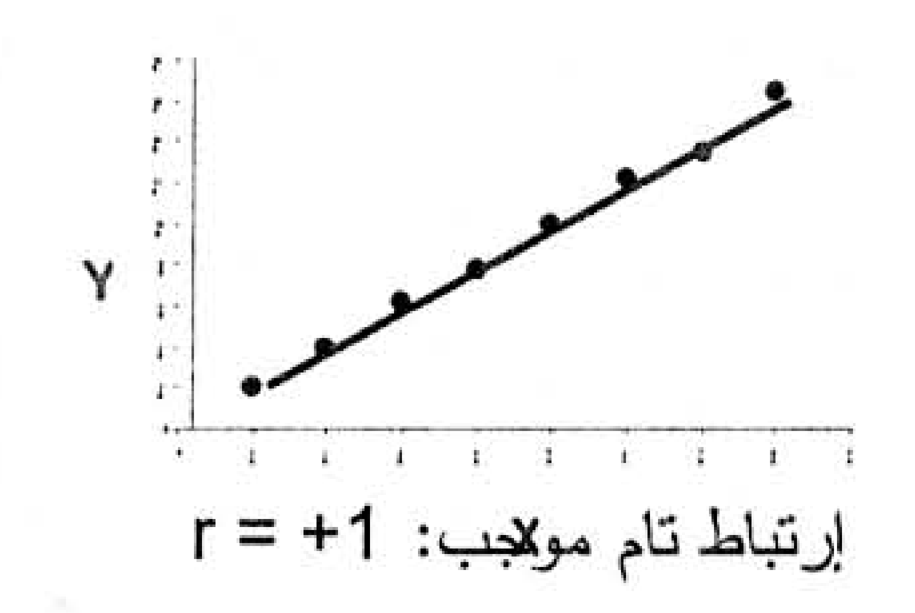
معامل الإرتباط هو معامل يقيس شدة العلاقة الإرتباطية بين المتغيرين X وY. تتراوح قيمته مابين 1- و 1+، و يعطى بالعلاقة التالية:

$$r = \frac{Cov\ (x, y)}{\sqrt{Var\ (x).Var\ (y)}} = \frac{\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \overline{x})^2.(y_i - \overline{y})^2}} = \frac{Cov\ (x, y)}{n\sigma_x.\sigma_y} \quad (5.7)$$

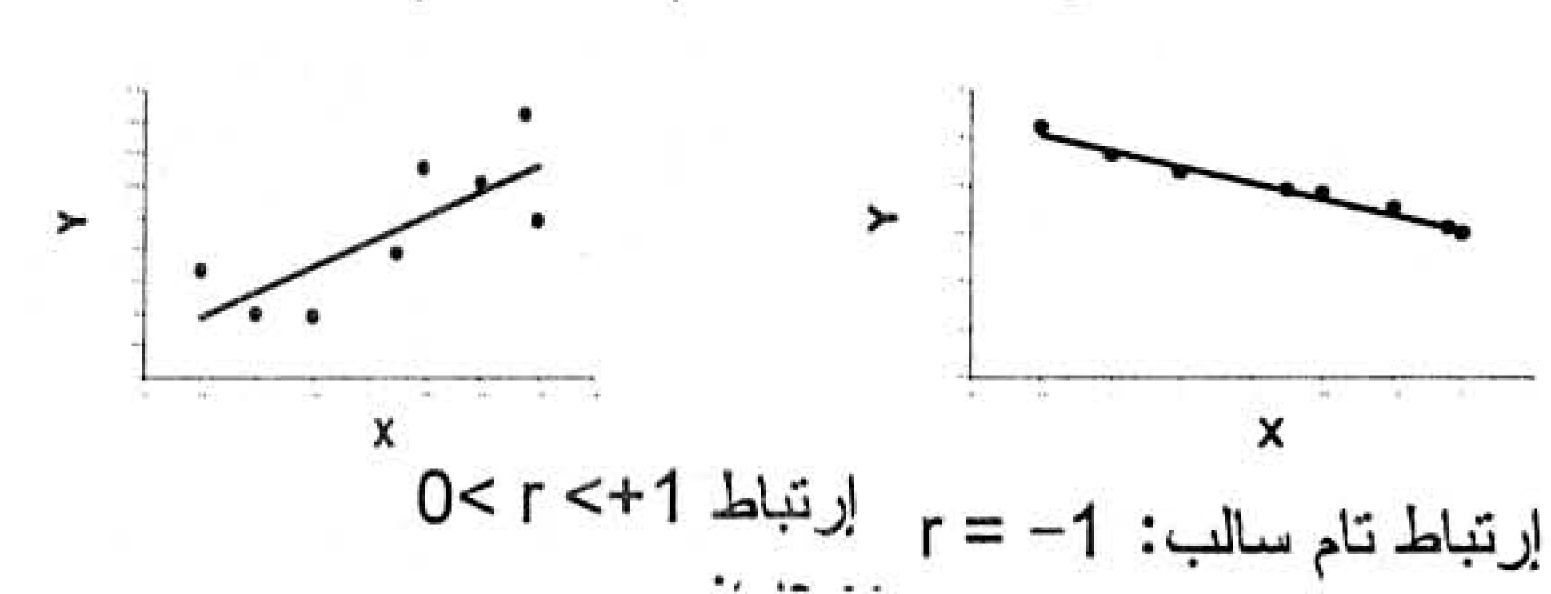
حيث: σx و σy هما الإنحرافات المعيارية لـــ X و Y على التوالي.

إذا كان:

- $r = +1$ هذا يعني وجود إرتباط تام موجب (علاقة طردية)،
- $r = -1$ يعني إرتباط تام سالب (علاقة عكسية)،
- $r = 0$ لا يوجد إرتباط (إستقلال).

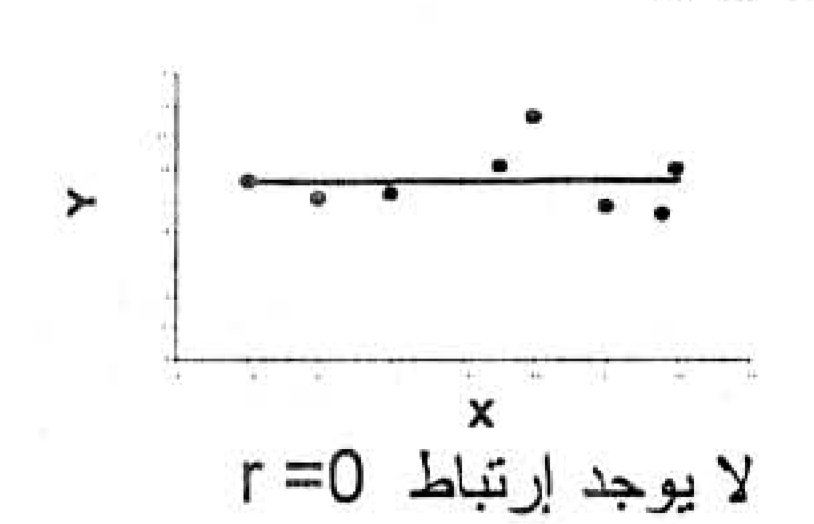


إرتباط تام موجب: r = +1



إرتباط 0< r <+1

إرتباط تام سالب: r = −1



لا يوجد إرتباط r =0

- **عبارة أخرى لمعامل الإرتباط:**

بغية تسهيل الحسابات يمكن تبسيـــط عبارة معامل الإرتباط لتأخذ الصيغـــة التالية:

$$r = \frac{\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{[n\sum x^2 - (\sum x)^2][n\sum y^2 - (\sum y)^2}} \quad (5.8)$$

< مثـــــال:

لدى دراسة 8 مؤسسات لصناعة النسيج إستخلصنا عدد الوحدات الإنتاجية في كل مؤسسة X، و متوسط الإنتاج اليومي فيها Y (بالطن). تحصلنا على النتائج التالية:

X	10	20	30	40	50	60	70	80
Y	21	40	62	78	100	122	135	164

المطلوب دراسة العلاقة الإرتباطية بين عدد الوحدات الإنتاجية و متوسط الإنتاج اليومي.

< الحـــــل:

من المقارنة الأولية، يظهر وجود علاقة طردية بين المتغيرين، و يظهر ذلك جليا بعد رسم شكل الإنتشار، الذي يأخذ إتجاه إرتباط مستقيم، و عليه فإن المعادلة المقترحة هي كما يلي:

$$Yi^* = a_0 + a_1 X_i$$

ولحساب قيم ثوابت المعادلة، نملأ الجدول التالي:

X	Y	XY	X^2	Y^2
10	21	210	100	441
20	40	800	400	1600
30	62	1860	900	3844
40	78	3120	1600	6084
50	100	5000	2500	10000
60	122	7320	3600	14884
70	135	9450	4900	18225
80	164	13120	6400	26896
360	**722**	**40880**	**20400**	**81974**

إنطلاقا من المعادلة (5.5) نجد:

$$8\,a_0 + 360\,a_1 = 722$$
$$360\,a_0 + 20400\,a_1 = 40880$$

بعد حل هذه الجملة بإحدى الطرق الرياضية، تكون المعادلة كما يلي:

$$Y_i^* = 0.36 + 2\,X_i$$

ويمكن بسهولة حساب معامل الإرتباط r من خلال العبارة (5. 7) فنجد:

$$r = \frac{8(40880) - (360)(722)}{\sqrt{[8(20400) - (360)^2][8(81974) - (722)^2]}} = 0.998$$

3.1.2.5- إختبار دلالة معامل الإرتباط:

ليكن ρ معامل إرتباط مجتمع ما، وليكن r معامل الإرتباط لعينة أخذت من هذا المجتمع. نريد أن نختبر إذا ما كان معامل إرتباط المجتمع يختلف معنويا عن الصفر (عند مستوى دلالة α)، أي:

$$H_0: \rho = 0$$
$$H_1: \rho \neq 0$$

لإجراء هذا الإختبار فإننا نستخدم توزيع t، فتكون قيمة t كما يلي:

$$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2} \qquad (5.9)$$

عند درجات حرية n-2

فإذا كانت t التطبيقية > من t النظرية، فإننا نرفض H_0 لصالح H_1.

➢ **مثـــــال:**

أخذنا عينة حجمها 18 مفردة، وقمنا بدراسة علاقة إرتباطية بين ظاهرتين في هذه العينة، فوجدنا أن معامل الإرتباط يساوي 0.32. هل يمكن أن يكون معامل الإرتباط في مجتمع العينة أكبر معنويا من الصفر.

➢ **الحـــــل:**

$$t_{\text{التطبيقية}} = \frac{0.32\sqrt{18-2}}{\sqrt{1-(0.32)^2}} = 1.35$$

من جدول توزيع t (عند 0.95) يمكن بسهولة قراءة قيمة t النظرية، فنجد القيمة 1.75. و حيث أن t النظرية أكبر من t التطبيقية، فإننا نقبل H_0، أي أن معامل إرتباط المجتمع لا يختلف معنويا عن الصفر.

- **ملاحظة هامة:**

من أجل الحصول على علاقة إرتباطية لها معنوية عند α ، يجب رفع حجم العينة، في هذه الحالة فإن العلاقة الإرتباطية تتبع التوزيع الطبيعي، وبذلك يكون معامل إرتباط المجتمع ρ يختلف معنويا عن الصفر.

لإجراء هذا الإختبار، فإننا نعرف الدالة الإحتمالية التالية:

$$X = \frac{1}{2}\text{Ln}\,\frac{(1+r)}{(1-r)} = 1.1513\log\,\frac{1+r}{1-r} \qquad (5.10)$$

إن الدالة الاحتمالية $\mathring{X}$ تخضع للتوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي μ_x وانحرافه المعياري σ_x حيث:

$$_x\mu = \frac{1}{2}\text{Ln}\,\frac{(1+\rho)}{(1-\rho)} \quad , \qquad \sigma x = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$$

➢ **مثـــــال:**

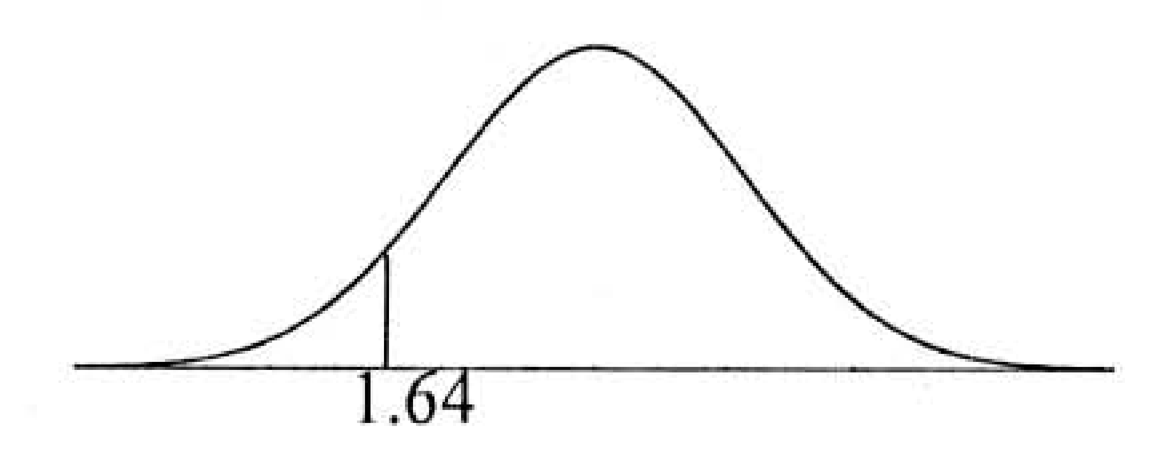
عينة حجمها 24 مفردة، معامل إرتباطها 0.75. هل يمكن أن نرفض الفرضية القائلة بأن معامل الإرتباط للمجتمع الذي أخذت منه العينة أقل من 0.6، عند مستوى دلالة 5%.

➢ **الحـــــل:**

لدينا:

$$H_0:\ \rho = 0.60$$
$$H_1:\ \rho < 0.60$$
$$X = \frac{1}{2}\text{Ln}\,\frac{(1+r)}{(1-r)} = \frac{1}{2}\text{Ln}\,\frac{(1+0.75)}{(1-0.75)} = 0.9730$$

وحيث أن الدالة الاحتمالية $\mathring{X}$ تخضع للتوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي μ_x



وانحرافه المعياري σ_x، فإن:

$$\mu_x = \frac{1}{2} Ln \frac{(1 + 0.6)}{(1 - 0.6)} = 0.69$$

و

$$\sigma x = \frac{1}{\sqrt{24-3}} = 0.21$$

نقوم بتحويل الوحدة X إلى الوحدة Z وفق العلاقة:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma_x} = \frac{0.9730 - 0.69}{0.21} = 1.34$$

وحيث أن $Z = 1.64$ النظرية أكبر من $Z=1.34$ التطبيقية، فإننا نقبل الفرضية H_0، أي أن $\rho = 0.60$

- **حالة إختبار تساوي معاملي إرتباط:**

لتكن العينتان A_1 وA_2 حجمهما على التوالي n_1 وn_2، معاملي إرتباطهما هما على التوالي r_1 و r_2. نريد أن نختبر الفرضية:

$$H_0: r_1 = r_2$$

لإجراء هذا الإختبار، يتحتم علينا حساب Z_1 وZ_2 المقابلتين لـــ r_1 و r_2 باستخدام المعادلة المعطاة في (5.10) لحساب قيمة X بدلالة معامل الإرتباط

المفترض. إن حساب قيمتي Z_1 و Z_2 من خلال حساب معامل إرتباط محول $\hat{r}$ وفق العلاقة التالية:

$$\hat{z} = \frac{1}{2} Ln \frac{(1+\hat{r})}{(1-\hat{r})}$$ المقابلة هي $\hat{z}$ حيث أن ، $$\hat{r} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

يسمح الجدول رقم 8 (أنظر الملحق)بإعطاء قيم Z دون اللجوء إلى هذه الحسابات.

نحسب إحصائية هذا الإختبار وفق العلاقة التالية:

$$Z = \frac{Z_1 - Z_2}{\sigma_{Z1 - Z2}} \qquad (5.11)$$

حيث:

$$\sigma_{Z1 - Z2} = \sqrt{\sigma^2_{Z1} + \sigma^2_{Z2}} = \sqrt{\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}} \qquad (5.12)$$

نرفض الفرضية العدمى H_0 عند مستوى دلالة α عندما يكون:

$$Z_{obs} \geq 1,96 \quad (\alpha = 5\%)$$

➢ مثـــــال:

قمنا بدراسة العلاقة الإرتباطية بين نسبة الكربون C و نسبة الأزوت N في التربة، من خلال عينتين، حجمهما $n_2=11,\ n_1=10$ مأخوذتين من منطقتين مختلفتين. وجدنا معاملات الإرتباط على التوالي: $r_1= 0,349\ ;\ r_2 = 0,827$

- هل توجد فروق معنوية لمعاملات الإرتباط بين العينتين؟.

➢ الحــــــل:

$$H_0: r_1 = r_2$$

$Z_1 = 0,3643$, $Z_2 = 1,1784$ [من الجدول 8 ،أنظر الملحق]

$$Z_{obs} = \frac{|0,364 - 1,178|}{\sqrt{\frac{1}{11} + \frac{1}{12}}} = 1.952$$

وحيث أن: $Z_{obs} \leq 1,96$ فإننا نقبل H_0 عند مستوى دلالة $\alpha = 5\%$.

- **إختبار تساوي أكثر من معاملي إرتباط:**

يمكن تعميم هذا الإختبار ليأخذ p معاملات إرتباط، حيث يكون:

$$(H_0: r_1 = r_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = r_p)$$

إن هذا الإختبار يخضع لتوزيع χ^2:

$$\chi^2_{obs} = \sum_{i=1}^{p} (n_i - 3)(Z_i - \overline{Z})^2 \qquad (5.13)$$

حيث $\overline{Z}$ ما هو إلا متوسط لقيم Z_i

نرفض الفرضية العدمى إذا كانت قيمة الـــ χ^2_{obs} التطبيقية أكبر من $\chi^2_{ddl\alpha}$ النظرية

$$\text{درجات الحرية} = p - 1$$

وعند تساوي حجوم العينات $n_1 = n_2 = \ldots\ldots = n_p = n$ فإن:

$$\chi^2_{obs} = (n-3)\sum_{i=1}^{p} (Z_i - \overline{Z})^2 \qquad (5.14)$$

ويمكن حساب المتوسط $\overline{Z}$ بسهولة، حيث:

$$\frac{Z_1 + Z_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + Z_n}{n}$$

➢ مثـــــال:

قمنا بدراسة العلاقة الإرتباطية بين التداول الاقتصادي لسلعة ما وبين قيمة هذه السلعة في أربع مناطق مختلفة، من خلال أخذ 10 عينات، فكانت النتائج كما يلي:

$r_1 = 0,349 \quad r_2 = 0,827 \;, \quad r_3 = 0,667 \;, \quad r_4 = 0,807$

- هل توجد فروق معنوية لمعاملات الإرتباط؟.

➢ الحـــــل:

$$H_0: r_1 = r_2 = r_3 = r_4$$

من الجدول (أنظر الملحق) نحسب القيم التالية:

$Z_1 = 0,3643 \quad Z_2 = 1,1784 \;, \quad Z_3 = 0,8054 \;, \quad Z_4 = 1,1183 \;,$

فيكون المتوسط: $\overline{Z} = 0,8666$

$$\chi^2_{obs} = (n-3)\sum(Zi - 0.86)^2 = (10-3).0,4166 = 2,92$$

$dll = 4 - 1 = 3$ و $\alpha = 5\%$

$\chi^2 = 7,81$

وحيث أن $\chi^2_{obs} < \chi^2_{0,05;3}$ فإننا نقبل H_0. عند مستوى معنوية 5%، هذا يعني تساوي معاملات الإرتباط في المناطق الأربع.

4.1.2.5- معامل التحديد R^2:

يقيس معامل التحديد كذلك شدة العلاقة الإرتباطية على نفس الطريقة التي يعمل بها معامل الإرتباط r، وهو يعرف بأنه حاصل قسمة تباين القيم التقديرية على تباين القيم الحقيقية، أي أن:

$$R^2 = \frac{\sigma^2_{y^*}}{\sigma^2_y} \qquad (5.15)$$

، حيث أن $0 < R^2 < 1$

5.1.2.5- دراسة الخطأ المرتكب و تقديره:

عندما نمثل العلاقة الإرتباطية بين المتغيرين X و Y بواسطة معادلة رياضية ما فإننا نحصل على القيم التقديرية Y_i^*، و إن هذه القيم لا تنطبق على القيم الحقيقية. يسمى الفرق بين القيم الحقيقية و القيم النظرية بقيم البواقي، و نرمز له بالرمز ε_i، حيث:

$$\varepsilon_i = Y_i - Y_i^* \qquad (5.16)$$

إن المقدار ε_i (عدد حقيقي) ناجم عن تأثير عدة أخطاء متراكمة أهمها:

- خطأ القياس: أثناء قياس قيم X و قيم Y،
- خطأ العينة: عدم شمولية المعلومات و الإعتماد على قيم العينات،
- الخطأ في إختيار معادلة التمثيل المناسبة،
- الأخطاء الغير المفسرة الناتجة عن وجود عوامل أخرى لم تكن في الحسبان وتدخل في معادلة التمثيل،
- الأخطاء العشوائية، و هي الأخطاء التي تظهر فجأة في مرحلة ما من مراحل تطور العلاقة الإرتباطية.

ولذلك فإننا نفترض أن ε_i هو متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي $N(0,S^2_{yy^*})$ حيث أن:

$$S^2_{yy^*} = \sigma^2 \varepsilon\, i = \frac{1}{n}\sum(\varepsilon_i - 0)^2 = \frac{1}{n}\sum(Yi - Yi^*)^2 \qquad (5.17)$$

واعتمادا على جدول التوزيع الطبيعي فإن:

$$P(-1 \leq Z \leq +1) = 0.68$$

$$P(-1 \leq \frac{\varepsilon i}{\sigma_\varepsilon} \leq +1) = 0.68$$

$$P(-\sigma\varepsilon_i \leq \varepsilon_i \leq +\sigma\varepsilon_i) = 0.68$$

$$P(-\sigma_{\varepsilon i} \leq Y_i - Y_i^* \leq +\sigma_{\varepsilon i}) = 0.68$$

وحيث أن: $\sigma^2_{\varepsilon i} = S^2_{yy*}$ فإننا نجد:

$$P(-S_{yy*} \leq Y_i - Y_i^* \leq S_{yy*}) = 0.68$$

أي أن : $P(Y_i^* - S_{yy*} \leq Y_i \leq Y_i^* + S_{yy*}) = 0.68$

مما يعني أن القيم الحقيقية محصورة في المجال:

$[Y_i^* - S_{yy*} \ , \ Y_i^* + S_{yy*}]$ بإحتمال قدره 0.68 (5.18)

و بالمثل نجد:

$[Y_i^* - 2S_{yy*} \ , \ Y_i^* + 2S_{yy*}]$ بإحتمال قدره 0.96 (5.19)

$[Y_i^* - 3S_{yy*} \ , \ Y_i^* + 3S_{yy*}]$ بإحتمال قدره 0.997 (5.20)

تسمى هذه المجالات بمجالات الثقة للقيم الحقيقية بإحتمال ثقة($1 - \alpha$)

- **عبارة أخرى لمعامل التحديد** R^2:

مما سبق نستنتج أن $\sigma^2_{Yi} = \sigma^2_{Y*i} + S^2_{yy*}$: (التباين الكلي = تباين القيم التقديرية — تباين الخطأ)،

أي أن: $\sigma^2_{Y*i} = \sigma^2_{Yi} - S^2_{yy*}$ ، من جهة أخرى لدينا:

$$R^2 = \frac{\sigma^2 y^*}{\sigma^2 y} = 1 - \frac{S^2 yy^*}{\sigma^2 Y} \qquad (5.21)$$

- إذا كان $R^2 = 1$ فإن المقدار $\frac{S^2 yy^*}{\sigma^2 Y} = 0$ ، أي أن $S^2_{YY*} = 0$، وبالتالي تنطبق القيم التقديرية على القيم الحقيقية و هو ما يعني إرتباط تام،

- إذا كان $R^2 = 0$ فإن المقدار $\frac{S^2 yy^*}{\sigma^2 Y} = 1$ ، أي أن $S^2_{YY*} = \sigma y^2$، وبالتالي تباين قيم الخطأ هو نفسه تباين القيم الحقيقية وهو ما يعني إستقلال تام.

- **العلاقة بين معامل الإرتباط r و معامل التحديد** R^2:

تتحقق هذه العلاقة فقط عندما يكون الإرتباط خطي، فنحصل على:

$$R^2 = r^2$$

أما في باقي الحالات الإرتباطية فإنه لا يمكن إستنتاج هذه العلاقة.

6.1.2.5- إختبار معامل التحديد R^2:

يخضع هذا الإختبار إلى توزيع F (فيشر)، و الذي يحسب من خلال العلاقة التالية:

$$F = \frac{n-m}{m-1} \cdot \frac{\sigma^2 y^*}{S^2 yy^*}_{\text{التطبيقية}} \qquad (5.22)$$

حيث أن m هي عدد الثوابت المقدرة في معادلة التمثيل، n هو حجم العينة في السلسلة الإرتباطية.

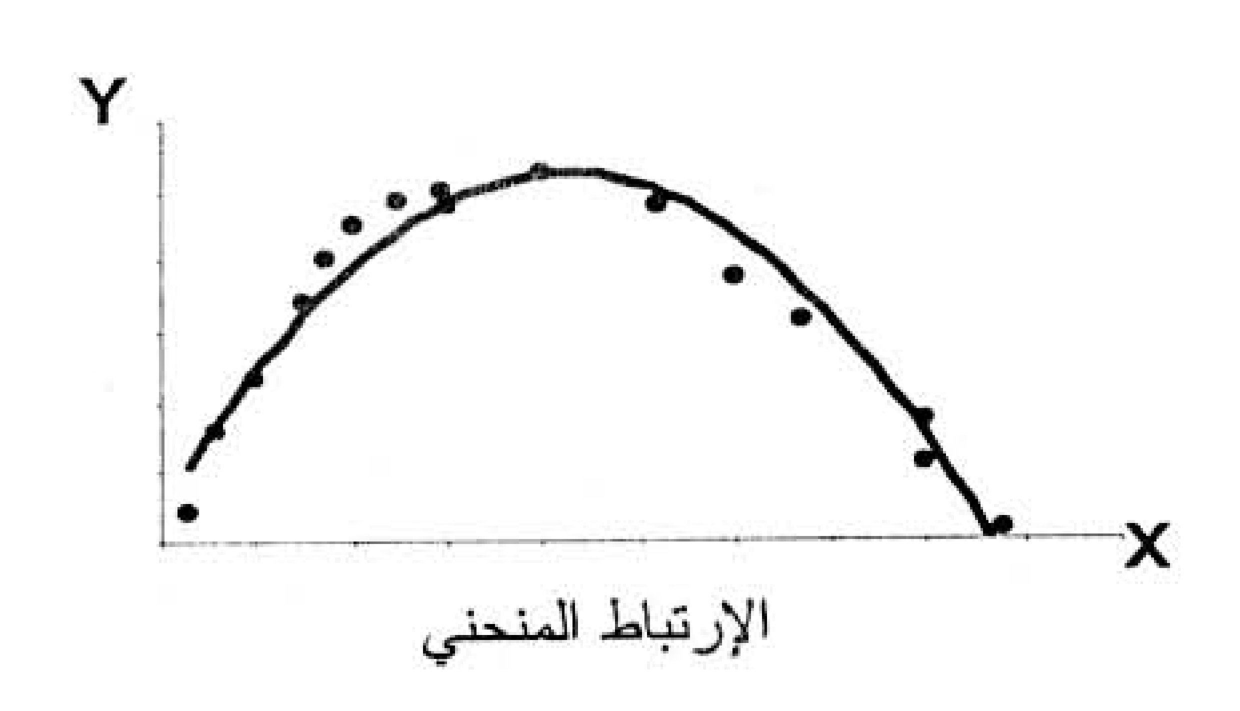
في جدول F يمكن أن نقرأ $V_1 = m-1$ و $V_2 = n-m$ و من ثم قيمة F النظرية. فإذا كانت F النظرية أكبر من F التطبيقية فإن قيمة R^2 ليس لديها معنوية (عند مستوى معنوية α)، لذلك نضطر إلى تغيير معادلة التمثيل أو زيادة حجم العينة (أو كلاهما معا) للحصول مستوى معنوية لمعامل التحديد.

3.5- الإرتباط المنحني:

إذا كان شكل الإرتباط لا يأخذ شكل مستقيم، فإنه من الضروري البحث عن الشكل المنحني وعن معادلة التمثيل الخاصة به.

1.3.5- التمثيل بواسطة معادلة من الدرجة الثانية (معادلة القطع المكافئ):

إن هذا الإرتباط يأخذ المعادلة التالية: $Y^{*} = a_0 + a_1X + a_2X^2$ (5.23)



الإرتباط المنحني

ولحساب الثوابت نستخدم طريقة المربعات الصغرى فنجد:

$$a_0 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2 \sum (x_i - \overline{x})^2 (y_i - \overline{y})}{\left[\sum (x_i - \overline{x})^2\right]^2 - N \sum (x_i - \overline{x})^4}$$

$$a_1 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2 (y_i - \overline{y})}{\sum (x_i - \overline{x})^2}$$

$$a_2 = \frac{- N.C}{\sum (x_i - \overline{x})^2}$$

يمكن إستعمال كذلك طريقة المجاميع فنجد:

$$Y^{*} = a_0 + a_1X + a_2X^2$$

نجمع وفق قيم i فتحصل على ما يلي:

$$\sum Yi = na_0 + a_1\sum Xi + a_2\sum X^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

نضرب المعادلة الأصلية في x_i ثم نجمع وفق قيم i:

$$\sum XiYi = a_0\sum X_i + a_1\sum X_i^2 + a_2\sum X^3 \ldots\ldots 2$$

نضرب المعادلة الأصلية في X^2i ثم نجمع وفق قيم i:

$$\sum X_i^2 Y_i = a_0\sum Xi^2 + a_1\sum Xi^3 + a_2\sum X^4 \ldots\ldots 2$$

تتشكل لدينا جملة معادلة ذات 3 مجاهيل a_0، a_1 و a_2.

$$\left.\begin{aligned} \sum Y_i &= na_0 + a_1\sum Xi + a_2\sum X^2 \\ \sum X_iY_i &= a_0\sum X_i + a_1\sum X_i^2 + a_2\sum X^3 \\ \sum X_i^2Y_i &= a_0\sum X_i^{\ 2} + a_1\sum X_i^3 + a_2\sum X^4 \end{aligned}\right\} \quad (5.24)$$

تحل هذه الجملة بإحدى طرق حساب المصفوفات.

2.3.5- التمثيل بواسطة معادلة من الدرجة الثالثة:

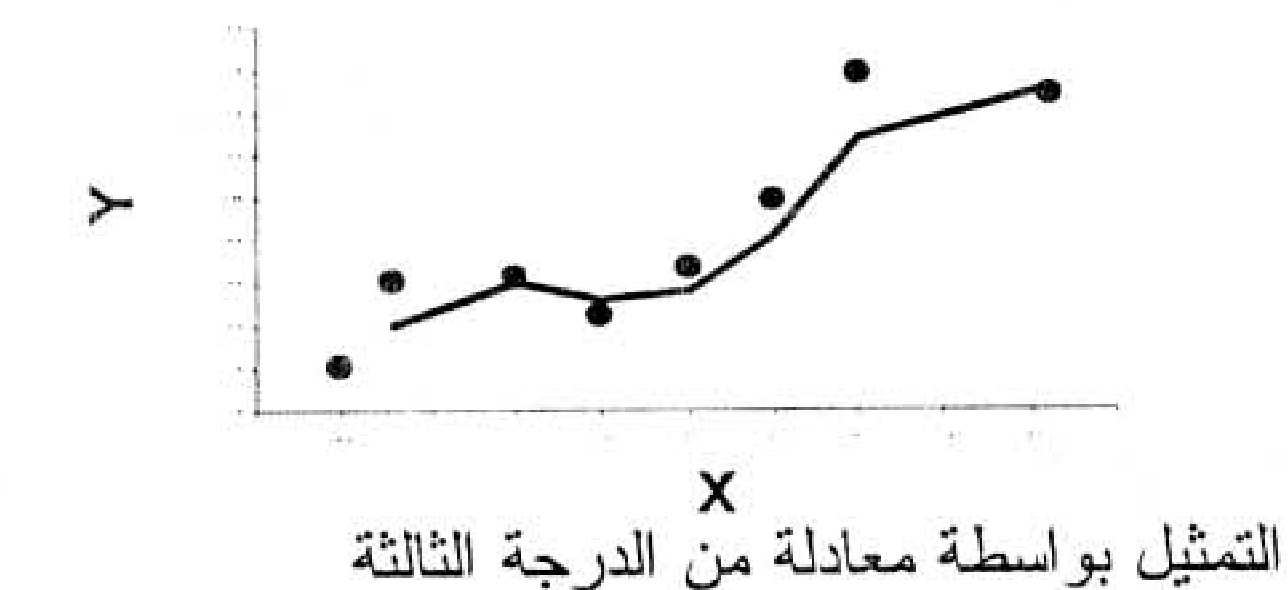
إن هذه المعادلة تأخذ الشكل التالي:

$$Y^* = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \qquad (5.25)$$

يمتاز منحنى هذا التمثيل بوجود نقطة إنعطاف (وجود تعرجات ذات قيمتين صغرى وعظمى). لحساب ثوابت هذه المعادلة نستخدم الأسلوب المستخدم في المعادلات السابقة فنجد:

$$\left.\begin{aligned} \sum Yi &= na_0 + a_1\sum Xi + a_2\sum Xi^2 + a_3\sum Xi^3 \\ \sum XiYi &= a_0\sum YiXi + a_1\sum YiXi^2 + {}_{a2}\sum YiXi^3 + a_3\sum YiXi^4 \\ \sum Xi^2Yi &= a_0\sum YiXi^{\ 2} + a_1\sum YiXi^3 + a_2\sum YiXi^4 + a_3\sum YiXi^5 \\ \sum Xi^3Yi &= a_0\sum YiXi^{\ 3} + a_1\sum YiXi^4 + a_2\sum YiX^5 + a_3\sum YiXi^6 \end{aligned}\right\} \quad (5.26)$$

نتحصل في الأخير على جملة معادلة ذات أربعة مجاهيل، تحل من خلال حساب المصفوفات.

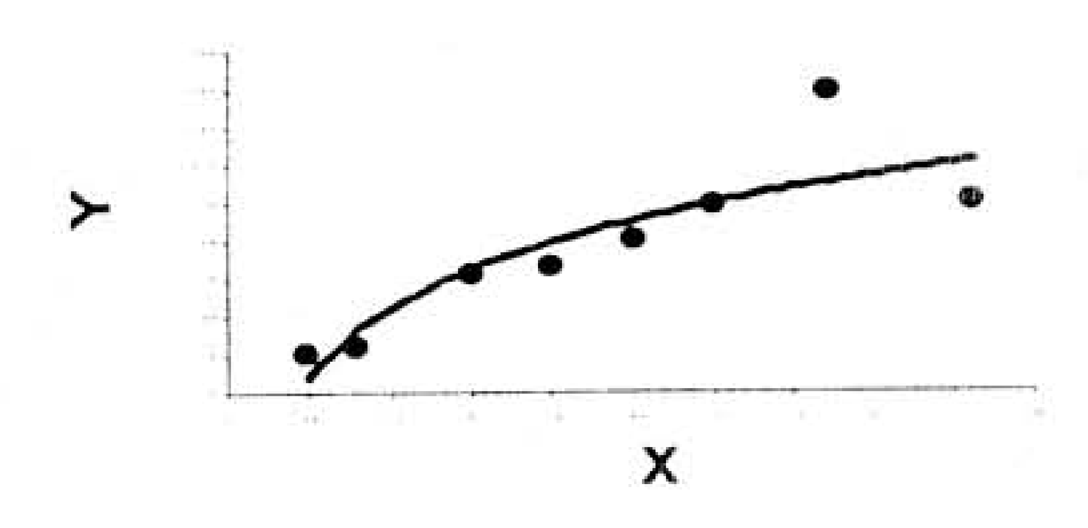


التمثيل بواسطة معادلة من الدرجة الثالثة

3.3.5- التمثيل بواسطة معادلة لوغارتمية:

إن هذا الإرتباط يأخذ المعادلة التالية:

$$Y^* = a_0 + a_1 \ln X \ , X > 0 \qquad (5.27)$$



التمثيل بواسطة معادلة لوغارتمية

نلاحظ أنه كلما إزدادت قيم X تزداد قيم Y ولكن بتباطأ.

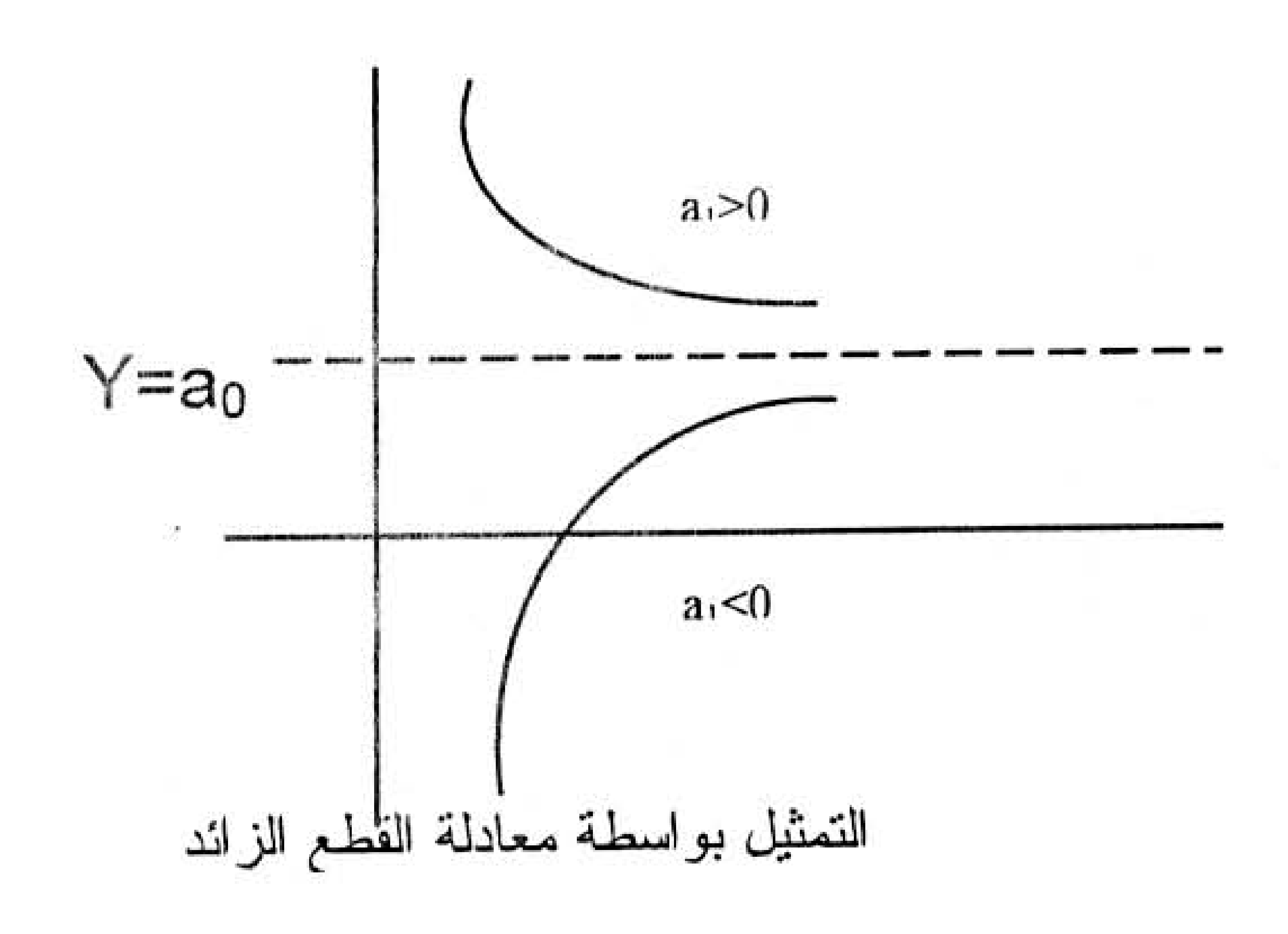
لإيجاد الثابتين ao و a1، نستخدم طريقة المربعات الصغرى فنحصل على:

$$\left.\begin{array}{c} \sum Yi = na0 + a1\sum \ln Xi \\ \sum Yi\ln Xi = a0\sum \ln Xi + a1\sum(\ln Xi)^2 \end{array}\right\} \qquad (5.28)$$

وذلك بعد ضرب المعادلة الأصلية في lnX ثم الجمع وفق قيم i.

4.3.5- التمثيل بواسطة معادلة القطع الزائد:

ويمكن أن نميز نوعين:



التمثيل بواسطة معادلة القطع الزائد

– **المعادلة من الشكل** (5.29) $Y^* = a_0 + \frac{a_1}{X}$

إن التمثيل البياني لهذه المعادلة يأخذ شكلين حسب إشارة a_1.

من مميزات هذه المعادلة أنه إذا كان X ينتهي إلى المالانهاية فإن Y تنتهي إلى الصفر. ولحساب قيم الثابتين a_0 وa_1 فإننا نستخدم طريقة المربعات الصغرى فنحصل عل ما يلي:

$$\left.\begin{array}{l} \sum Y_i = na_0 + a_1\sum \frac{1}{x} \\ \sum \frac{Y}{x} = a0\sum \frac{1}{x} + a_1\sum \frac{1}{x^2} \end{array}\right\} \quad (5.30)$$

وذلك بعد ضرب المعادلة الأصلية في $\frac{1}{x}$ ثم الجمع وفق قيم i.

- **المعادلة من الشكل:** $\frac{X^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

يمكن كتابة هذه المعادلة عل الشكل $Y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2$ ، ثم نفرض مايلي:

$\beta = b^2$ و $\alpha = \frac{b^2}{a^2}$، نتحصل على ما يلي:

$$Y^2 = \alpha X^2 - \beta$$

وبإستعمال طريقة المربعات الصغرى، نتحصل على الشكل التالي:

$$\left.\begin{array}{l} \sum y^2 = \alpha\sum x^2 - n\,\beta \\ \sum y^2x^2 = \alpha\sum x4 - \beta\sum x^2 \end{array}\right\} \quad (5.31)$$

بعد الجمع وضرب المعادلة الأصلية في X^2 ثم الجمع وفق قيم i.

بعد إيجاد قيمتي الثابتين α و β و تعويضهما في المعادلة (3.31)، نقوم بحل هذه المعادلة فنحصل على جذرين:

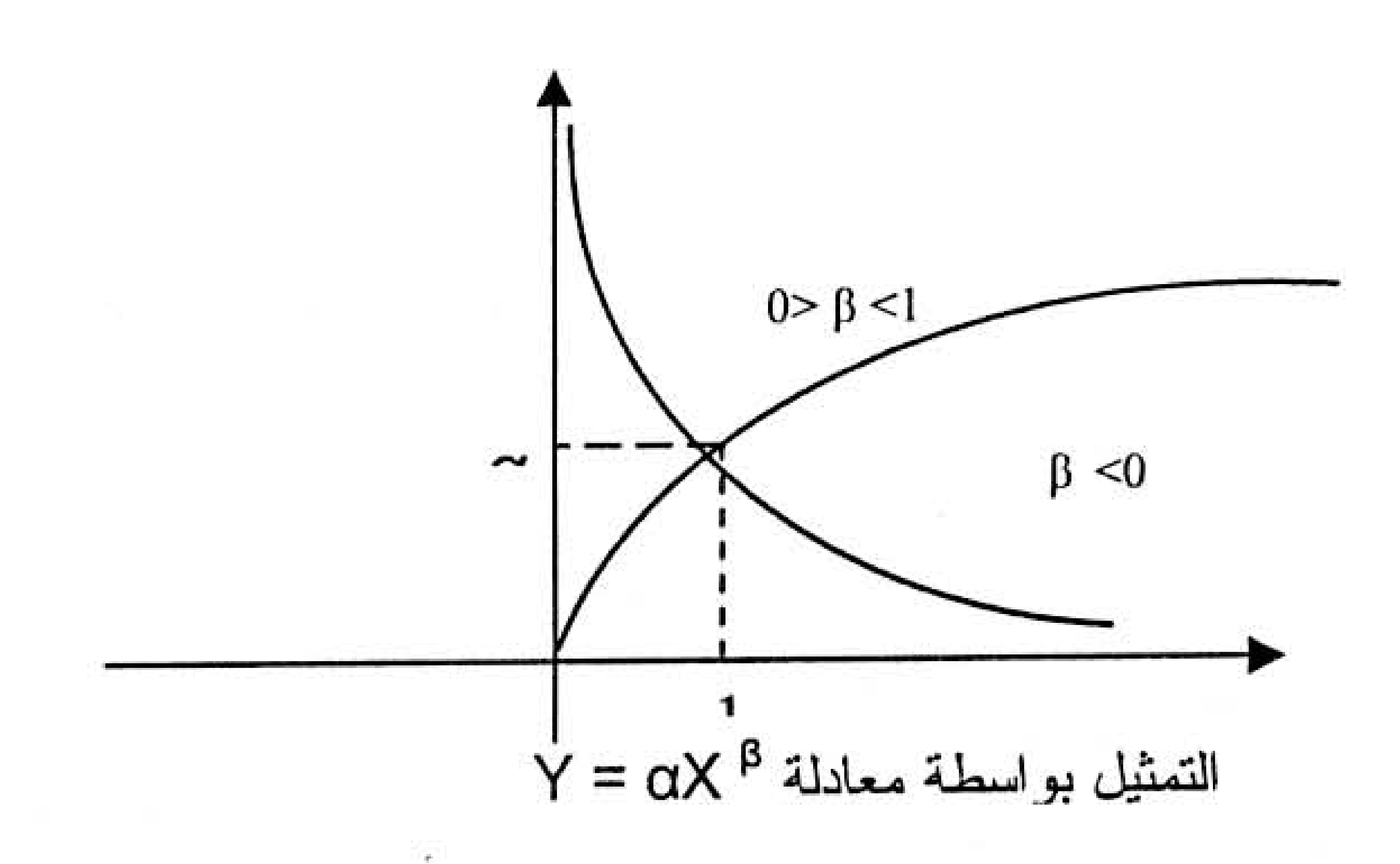
$$Y^* = +\sqrt{\alpha X^2 - \beta}$$

$\alpha X^2 - \beta \geq 0$ حيث أن المقدار $Y^* = -\sqrt{\alpha X^2 - \beta}$

يتم إختيار المعادلة المناسبة حسب المعطيات المقدمة (المعادلة الموجبة في المسائل الإقتصادية).

- **التمثيل بواسطة المعادلة من الشكل:** $Y = \alpha X^{\beta}$, $X > 0$

حيث أن α و β عددان حقيقيان. إن هذه المعادلة تأخذ شكلين حسب إشارة β كما هو موضح في الشكل التالي:



التمثيل بواسطة معادلة $Y = \alpha X^{\beta}$

ولمعالجة هذه المعادلة، نأخذ لوغارتم الطرفين:

$$\ln Y = \ln \alpha + \beta \ln X$$

بوضع:

$$\ln Y = Z$$
$$\ln \alpha = A$$
$$\ln X = X$$

تصبح المعادلة كما يلي:

$$Z = A + \beta X \qquad (5.32)$$

نلاحظ أن المعادلة المتشكلة ما هي إلا معادلة خط مستقيم، و لذلك فإن إيجاد قيمتي الثابتين يخضع لنفس الطريقة المتبعة في الإرتباط المستقيم. و بالرجوع إلى قيم اللوغارتم، حيث أن $\ln Y = Z$ نتحصل على الجملة التالية:

$$\sum \ln Yi = nA + \beta \sum Xi$$
$$\sum X \ln Yi = A \sum Xi + \beta \sum X^2$$

أي أن:

$$\left.\begin{array}{l} \sum \ln Yi = nA + \beta \sum \ln X \\ \sum \ln X \ln Yi = A \sum \ln X + \beta \sum (\ln X)^2 \end{array}\right\} \qquad (5.33)$$

تتحصل على جملة معادلة بمجهولين هما A و β، حيث: $A = e^{\alpha}$ التي يمكن حلها بسهولة بإحد الطرق الرياضية.

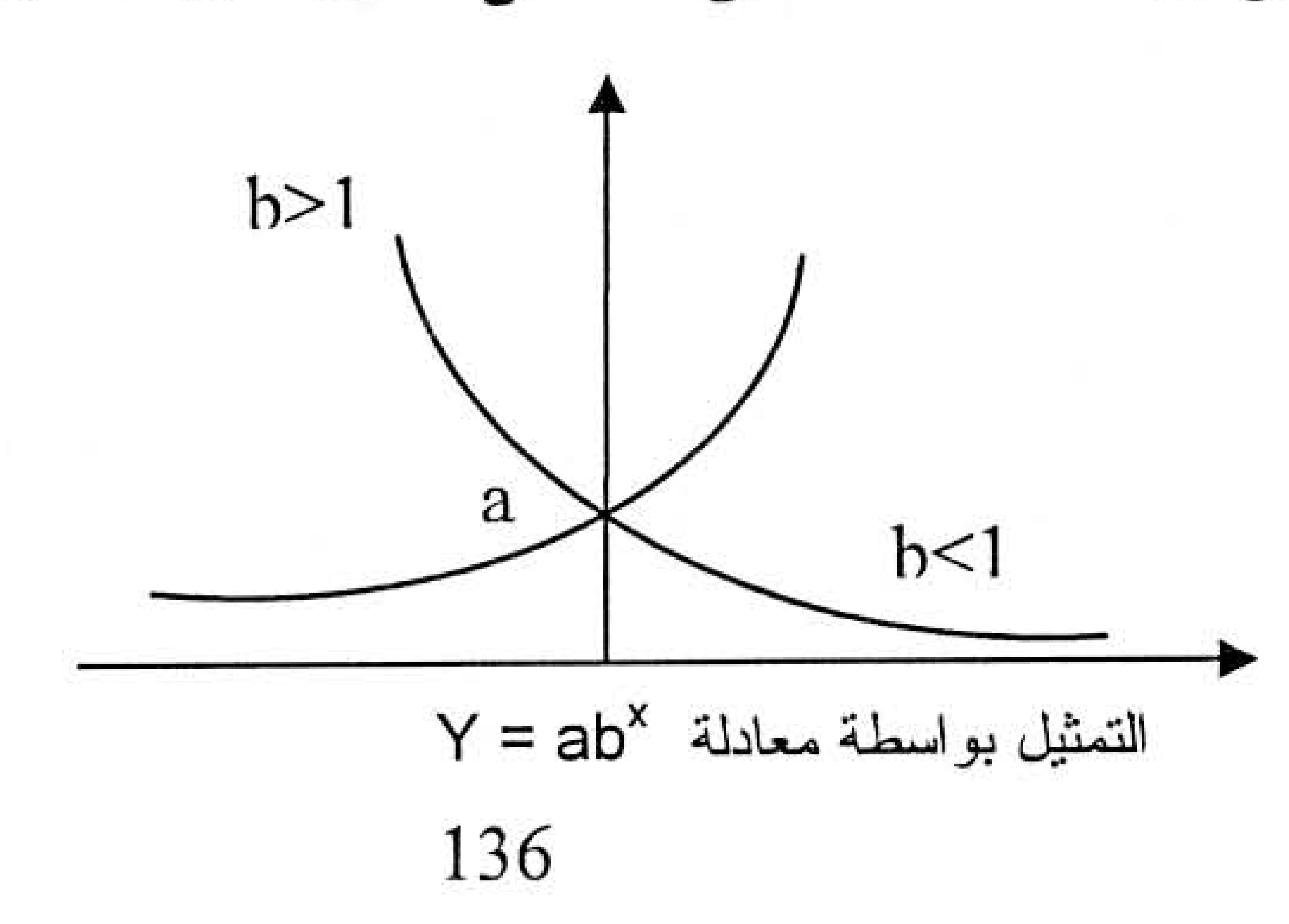
ملاحظة:

يمكن إستخدام اللوغارتم العشري في كافة العمليات الحسابية مع التذكير أن: $A = 10^{\alpha}$.

5.3.5- التمثيل بواسطة المعادلة الأسية:

إن المعادلات الأسية كثيرة ومتنوعة، وحلها يكون دوما بتحويلها إلى النموذج اللوغارتمي السالف الذكر، ولذلك نكتفي بأخذ الشكل التالي:

- **التمثيل بواسطة معادلة من الشكل: $Y = ab^x$ ، حيث $b>0$**



التمثيل بواسطة معادلة $Y = ab^x$

إن منحنيات هذا التمثيل يأخذ شكلين حسب قيمة b بالنسبة إلى 1

لمعالجة هذه المعادلة، نأخذ لوغارتم الطرفين فنحصل على:

$$\ln Y = \ln a + X \ln b$$

بفرض أن: $\ln a = A$ و $\ln b = B$، يصبح لدينا:

$$\ln Y = A + BX$$

لحساب قيم ثوابت هذه المعادلة، نستخدم طريقة المربعات الصغرى فنحصل على الجملة التالية:

$$\left.\begin{array}{l} \sum \ln Y_i = nA + B\sum X \\ \sum X \ln Y_i = A\sum X + B\sum X^2 \end{array}\right\} \quad (5.34)$$

وذلك بعد الجمع وضرب المعادلة الأصلية في x ثم الجمع وفق قيم i. تحل الجملة بإحدى الطرق الرياضية، ومن ثم يتم الرجوع إلى قيم a و b بإجراء عمليات تحويل اللوغاريتم (أنظر الطريقة المتبعة في المعادلة (5.31).

6.3.5- التمثيل بواسطة المعادلات المثلثية*:

تستعمل المعادلات المثلثية أساسا في تحليل السلاسل الزمنية، بغية إعطاء نموذج رياضي للتغيرات الدورية و التغيرات الموسمية. و عموما فإن الشكل العام لهذه التغيرات تأخذ النموذج التالي:

$$Y_t^* = a_0 + \sum_{k=1}^{m} (a_k \sin k\theta_t + b_k \cos \theta_t) \quad (5.35)$$

حيث:

$$\theta t = \frac{X - X_0}{X_n - X_0} 2\pi \qquad (5.36)$$

* لمزيد من المعلومات، راجع الفصل الرابع الخاص بتحليل السلاسل الزمنية.

ويمكن حساب الثوابت a_0، a_k، b_k كما يلي:

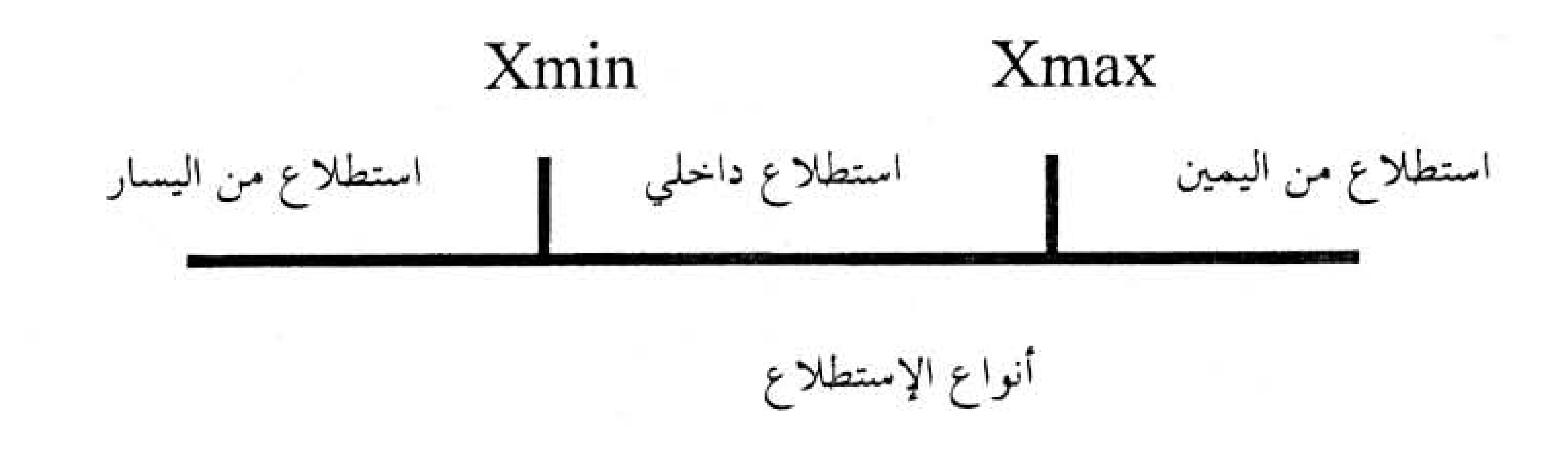
$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t \qquad , k = 1,2....m \\ a_k &= \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t \sin k\theta_t \\ b_k &= \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t \cos k\theta_t \end{aligned}\right\} \quad (5.37)$$

4.5- تطبيقات معادلات التمثيل:

تشكل هذه المعادلات نماذج رياضية يمكن توظيفها في عدة مجالات أهمها:

1.4.5- في مجال الإستطلاع و التنبؤ:

الإستطلاع هو عملية بحث عن قيمة Y (غير موجودة في السلسلة الإرتباطية) بدلالة X أوالعكس، وهو يختلف عن التنبؤ الذي يستخدم في السلاسل الزمنية التي تستخدم متغير الزمن كمتغير مستقل. ويمكن أن نميز ثلاثة أنواع من الإستطلاع وهما: الإستطلاع من الداخل (بأن نعطي قيمة لـــ X تتغير بين X_{min} وX_{max})، الإستطلاع من اليمين (بأن نعطي قيمة لـــ X أكبر من X_{max})والإستطلاع من اليسار (بأن نعطي قيمة لـــ X أصغر من X_{min})



أنواع الإستطلاع

➢ تمـــــرين:

نعتبر العلاقة الإرتباطية التالية: $C = 16 + \frac{12000}{X}$ ، حيث C هي كلفة السلعة و X تمثل كمية إنتاجها، و ذلك في عدد من المؤسسات الإنتاجية، و أن قيم X تتغير في المجال [50,100]. فإذا كان تباين خطأ هذا التمثيل يساوي 4 فالمطلوب:

- تقدير كلفة تلك السلعة في مؤسسة جديدة سيبلغ إنتاجها 120 وحدة / اليوم، ثم حساب مجال ثقة هذا التقدير بإحتمال قدره 0.96،
- تقدير كلفة تلك السلعة في مؤسسة لم يشملها بحثنا السابق، مع العلم أن إنتاجها يقدر بـــ 80 وحدة / اليوم، ثم حساب مجال ثقة هذا التقدير بإحتمال قدره 0.997،

➢ الحــــــل:

$$C_{120} = 16 + \frac{12000}{120} = 116$$

مجال الثقـــة عند احتمـــال 0.96: $116 - 2.2 \leq C \leq 116 + 2.2$ (أنظر المعادلة 5.14)

ومنه: $112 \leq C \leq 120$

2.4.5- في مجال حساب المؤشرات الاقتصادية المختلفة:

تساهم معادلات التمثيل في جميع أنواع التحليل الإقتصادي، فإذا كانت Y تمثل حجم الإنتاج في مؤسسة ما و المرتبط بأحد عوامل الإنتاج وليكن X، حيث $Y = f(x)$، فإنه يمكن حساب الإنتاجية الحدية وفق العلاقة التالية:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{df(X)}{dX} \qquad (5.38)$$

كما يمكن كذلك حساب مرونة الإنتاج وفق ما يلي:

$$E = \frac{\frac{dy}{Y}}{\frac{dX}{X}} = \frac{X}{Y}\frac{dY}{dX} \qquad (5.39)$$

هذه المعادلة تعبر عن نسبة التزايد النسبي لـــ Y على التزايد النسبي لـــ X عند النقطة x.

➢ **تمـــــرين:**

لتكن دالة كلفة الإنتاج Y معرفة بمعادلة التمثيل التالية:

Y = X3 – 10X² + 17X + 66

المطلوب:

- أوجد أصغر قيمة للكلفة إذا كانت X تتغير في المجال [0,10]
- أوجد حجم الإنتاج الذي يكون فيه الربح أعظميا وذلك بفرض أن سعر الوحدة هو 5 دج
- أوجد مرونة الكلفة بالنسبة لـــ X عند نقطة الربح الأعظمي.

➢ **الحـــــل:**

- أصغر قيمة للكلفة تقابل النهاية الصغرى لدالة الكلفة، ولذلك فإننا نحسب مشتق هذه الدالة:

Y' = 3X2 – 20X + 17

Y' = 0 يعني 3X2 – 20X + 17 = 0

إن حل هذه المعادلة بالمميز يعطي حلين هما:

X = 1 ➡ Y(1) = 74 (أكبر قيمـــة)

X = 5.67 ➡ Y(5.67) = 22.43 (أصغر قيمـــة)

- لتكن P هي دالة البيع، حيث P = 5X، فتكون دالة البيع:

Z = P – Y = 5X - X3 + 10X² - 17X – 66

يكون الربح أعظميا إذا كان:

$$Z' = (-X3 + 10X^2 - 12X - 66)' = 0$$

$$-3X^2 + 20X - 12 = 0$$

بحد حل المعادلة نجد:

$X = 6 \Rightarrow Z(1) = 6$ (ربح أعظمي)

$X = 0.66 \Rightarrow Y(0.66) = -67.63$ (خســــــارة)

- مرونة Y عند النقطة $X = 6$ (عند الربح الأعظمي):

$$E_6 = \frac{X}{Y}(3X^2 - 20X + 17) = \frac{6}{24}(5) = 125$$

5.5- الإرتباط المتعدد:

لاحظنا في البند الأول أن المتغير المرتبط Y يتأثر بمتغير واحد فقط، يدعى المتغير المستقل، ولذلك سمي بالإرتباط البسيط، غير أن الكثير من الظواهر تتأثر بجملة من المتغيرات. نسمى العلاقة بين المتغير Y و جملة المتغيرات $X_1,X_2....X_n$ بالإرتباط المتعدد.

➢ **أمثلــــــة:**

- في المجال الزراعي: يتأثر المنتوج الزراعي بجملة من العوامل أهمها: الأسمدة X_1، طبيعة التربة X_2 ، المناخ X_3 . أي أن$Y = f(X_1, X_2, X_3)$
- في المجال الاقتصادي: يتأثر مقدار دخل أسرة بمجموعة من المتغيرات أهمها: دخل الأسرة X_1، عدد الأفراد X_2 و بمستوى أسعار السلع الاستهلاكية X_3. أي أن $Y = f(X_1, X_2, X_3)$.

1.5.5- الخطوات الأساسية لدراسة الارتباط المتعدد:

- تحديد العوامل المؤثرة في المتغير Y(عددا و نوعا)،
- اختيار المتغيرات المستقلة وذلك بحذف أحد أي متغيرين مرتبطين ببعضهما و الإبقاء على المتغيرات المستقلة الهامة،
- حساب معامل الارتباط المتعدد للعلاقة الإرتباطية،

- تحديد نوع معادلة التمثيل بناءا على طبيعة العلاقة المدروسة،
- حساب ثوابت معادلة التمثيل بطريقة المربعات الصغرى،
- إختبار معامل التحديد.

ا) - إختيار المتغيرات المستقلة و الهامة:

يتميز الإرتباط المتعدد بكثرة متغيراته، و التي إذا دخلت في معادلة التمثيل زادتها تعقيدا، لذلك يحاول الباحثون الإقتصار على الهامة منها فقط في حين يتم حذف باقي المتغيرات. من أجل ذلك فإنه يجب حساب معاملات الإرتباط الزوجية بين المتغيرات المستقلة فيما بينها، فيكون:

$$r_{kh} = \frac{\sum (X_{ki} - \bar{X}_k)(X_{hi} - \bar{X}_h)}{n\sigma_k\sigma_h} \qquad (5.40)$$

حيث أن σ_{xk} و σ_{xh} هما تباينا X_k و X_h على الترتيب.

الخطوة التالية تتمثل في حساب معاملات الارتباط الزوجية بين المتغيرات المستقلة والمتغير المرتبط Y كما يلي:

$$r_{ky} = \frac{\sum (X_{ki} - \bar{X}_k)(Y_i - \bar{Y})}{n\sigma_k\sigma_Y} \qquad (5.41)$$

تلخص هذه الحسابات في الجدول التالي الذي يعرف بمصفوفة الإرتباط:

المتغيرات	X_1	X_2	X_3	....	X_k	....	X_m	Y
X_1	1	r_{21}	r_{31}	....	rk1	....	r_{m1}	r_1
X_2	r_12	1	r_{23}		rk2	....	r_{m2}	r_2
X_3	r_{13}	r_{23}	1	....	rk3	....	rm3	r_3
				1		....	r_{mh}	......
					1	....	....	....
X_h	r_{1h}	r_{2h}	r_{3h}	....	r_{kh}	....	r_{km}	r_h
X_m	r_{1m}	r_{2m}	r_{3m}	....	r_{km}	....	1	r_m
Y	r_1	r_2	r_3	....	r_k	.....	r_m	0

مصفوفة الإرتباط

من خلال جدول مصفوفة الإرتباط، نقوم بحذف أحد المتغيرين المستقلين اللذان يحققان العلاقة التالية:

$|r_{kh}| \geq 0.80$ حيث $K \neq h$، هذا يعني وجود إرتباط قوي بين هذين المتغيرين. ولكن أي المتغيرين يجب حذفه ؟.

لتحديد أي المتغيرين يجب حذفه، نلجأ إلى معلملات الإرتباط مع المتغير المرتبط Y، فإذا كان:

$|r_{kY}| > |r_{hY}|$ هذا يعني أن المتغير المستقل X_k له علاقة قوية مع Y، و بالتالي لا يمكن حذفه (يحذف عندئذ X_h) .

➢ **مثال تطبيقي:**

قمنا بدراسة علاقة المتغير Y بمجموعة من المتغيرات المستقلة X_1,X_2,X_3، فتحصلنا على مصفوفة الإرتباط التالية:

المتغيرات	X_1	X_2	X_3	Y
X_1	1	0.85	0.41	0.71
X_2	0.85	1	0.32	0.44
X_3	0.41	0.32	1	0.90
Y	0.71	0.44	0.9	0

المطلوب: حدد المتغيرات المستقلة الداخلة في معادلة التمثيل.

➢ **الجـــــواب:**

نلاحظ أن $|r_{12}| = 0.85 > 0.80$، هذا يعني أن X_1 جد مرتبط مع X_2 مما يعني حذف أحدهما. نلاحظ كذلك أن $_{r1}$=0.71 و r_2=0.44، أي أن $r_1>r_2$، وبالتالي يحذف X_2.

ب)- معامل الإرتباط المتعدد:

لنفرض أن A هي مصفوفة الإرتباط التي تم تشكيلها، بعد حذف المتغيرات المستقلة التي لا تدخل في معادلة التمثيل، و هي التي ممثلة في الجدول1، ولنفرض أن المصفوفة B هي التي مشكلة في الجدول،1مع الإشارة إلى أن المصفوفة B لا تحتوي على السطر الأخير و العمود الأخير الخاصان بالمتغير Y. فيكون معامل الإرتباط المتعدد:

$$r^2 = -\frac{\det A}{\det B}$$ المتعدد حيث أن $$\frac{\det A}{\det B} < 0$$

حيث أن det A هو محدد المصفوفة A و det B هو محدد المصفوفة B.
بعد التعويض نجد:

$$r^2 = -\frac{\det \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1m} & r_1 \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \dots & r_{2m} & r_2 \\ r_{31} & r_{32} & 1 & \dots & r_{3m} & r_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & r_{m3} & \dots & 1 & r_m \\ r_1 & r_2 & r_3 & \dots & r_m & 0 \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \dots & r_{2m} \\ r_{31} & r_{32} & 1 & \dots & r_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & r_{m3} & \dots & r_m \end{vmatrix}} \qquad (5.42)$$

يتم حساب معامل الإلرتباط المتعدد بأخذ الجذر التربيعي لحاصل (5.42)، حيث أن $+1 \geq r \geq -1$.

- **حالة متغيرين مستقلين:**

إذا كان X_1 و X_2 متغيرين عشوائين و Y هو المتغير المرتبط، فإن معامل الإرتباط المتعدد يكون كما يلي:

$$r^2{}_{Y(x1x2)} = -\frac{\det \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_1 \\ r_{21} & 1 & r_2 \\ r_1 & r_2 & 0 \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{21} & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{-r^2{}_2 + 2r_{12}r_1r_2 - r^2{}_1}{1 - r^2{}_{12}}$$

$$r_{y(X1X2)} = \sqrt{\frac{r^2{}_1 + r^2{}_2 - 2r_1r_2r_{12}}{1 - r^2{}_{12}}} \qquad (5.43)$$

➢ **تمـــــــرين:**

يمثل الجدول التالي معطيات إحصائية خاصة بعدد الوحدات الإنتاجية Y التي ينتجها العامل ومقدار الوقت الضائع خلال فترة العمل X1 ومدة خبرته المهنيةX2 :

رقم	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	390	387	387	401	394	394	395	391	404	395
X_1	19	15	17	11	14	12	16	13	10	13
X_2	3	2	3	5	5	4	3	5	6	4

المطلوب: حساب معامل الإرتباط المتعدد.

➢ الحـــــل:

$$r_{y(X_1X_2)} = \sqrt{\frac{r^2_1 + r^2_2 - 2r_1r_2r_{12}}{1 - r^2_{12}}}$$

$$r_1 = \frac{\sum(X_{1i} - \overline{X}_1)(Y_i - \overline{Y})}{n\sigma_{x1}\sigma_y} \;;\; r_2 = \frac{\sum(X_{2i} - \overline{X}_2)(Y_i - \overline{Y})}{n\sigma_{x2}\sigma_y} \;;$$

$$r_{x1x2} = \frac{\sum(X_{1i} - \overline{X}_1)(X_{2i} - \overline{X}_2)}{n\sigma_{x1}\sigma_{x2}}$$

بعد الحسابات نجد: $\overline{Y} = 394$ و $\overline{X}_2 = 4$ ، $\overline{X}_1 = 14$ حيث أن:

$$r1=-0.74 \quad , r2=0.77 \quad , \quad r_{12}=-0.76$$

$$r_{y(X_1X_2)} = \sqrt{\frac{(-0.74)^2 + (0.77)^2 - 2(-0.74)(0.77)(-0.76)}{1-(-0.76)^2}} = 0.81$$

وهو مايعني أن علاقة المتغير Y بالمتغيرين X_1 و X_2 أقوى من علاقته بكل منهما على حدى (لأن $ry(X_1X_2)>r_1,r_2$).

- **إختبار دلالة معامل الإرتباط المتعدد:**

إن هذا الإختبار يخضع إلى حساب الكمية التالية وفق العلاقة:

$$t_r = \frac{r\sqrt{n-m}}{1-r^2} \qquad (5.44)$$

حيث: n هو حجم العينة، m هو عدد الثوابت الداخلة في معادلة التمثيل. فإذا كان $t_r > 2$ فإن لمعامل الإرتباط المتعدد معنوية.

ج)- تحديد نوع معادلة التمثيل:

تعتبر هذه المرحلة من أصعب مراحل الإرتباط المتعدد، فغالبا ما تكون الصيغة الرياضية المقترحة تعتمد على الأسس الحسية والمادية، كأن ندرس كيفية

تفاعل المتغيرات المستقلة مع المتغير المرتبط، و كيفية تناسبها. كما يجب أن تكون المعادلة المقترحة تحتوي على ثوابت سهلة الحسابات.

2.5.5- أهم أنواع المعادلات المستخدمة في الإرتباط المتعدد:

- **الإرتباط الخطي المتعدد:**

إن المعادلة المقترحة تأخذ الشكل التالي:

$$Y^* = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots\ldots a_mX_m \qquad (5.45)$$

ولحساب ثوابت هذه المعادلة، نستخدم طريقة المربعات الصغرى، فنحصل على المعادلة الأولى:

$$\sum Y = na_0 + a_1\sum X_1 + a_2\sum X_2 \ldots\ldots + a_m\sum X_m \ldots\ldots\ldots 1$$

نضرب المعادلة الأصلية في X_1 ثم نجمع وفق قيم i فنحصل على مايلي:

$$\ldots\ldots\ldots\ldots 2 \sum X_1Y = a_0\sum X_1 + a_1\sum X^2_1 + a_2\sum X_1X_2 \ldots\ldots + a_m\sum X_1X_m$$

نضرب المعادلة الأصلية في X_2 ثم نجمع وفق قيم i فنحصل على مايلي:

$$\sum X_2Y = a_0\sum X_2 + a_1\sum X_2X_1 + a_2\sum X^2_2 \ldots\ldots + a_m\sum X_2X_m \ldots\ldots\ldots\ldots 3$$

$$\sum X_mY = a_0\sum X_m + a_1\sum X_mX_1 + a_2\sum X_mX_2 \ldots\ldots + a_m\sum X^2_m \ldots\ldots\ldots n$$

فإذا كان لدينا معادلة بمتغيرين X_1 و X_2 فإننا نحصل على الجملة التالية:

$$\left.\begin{aligned} \sum Y &= na_0 + a_1\sum X_1 + a_2\sum X_2. \\ \sum X_1Y &= a_0\sum X_1 + a_1\sum X^2_1 + a_2\sum X_1X_2 \\ \sum X_2Y &= a_0\sum X_2 + a_1\sum X_2X_1 + a_2\sum X^2_2 \end{aligned}\right\} \qquad (5.46)$$

ولحل هذه الجملة، نستخدم طريقة المصفوفات.

➢ **مثال تطبيقي:**

يمثل الجدول التالي علاقة نفقات أسرة على الأغذية بعدد أفرادها وبمقدار دخلها الشهري:

الدخل الشهري X_1	عدد الأفراد X_2	النفقات على الأغذية Y
90	1	25
110	1	28
120	2	31
130	2	32
180	3	36
220	3	42
280	4	55

- نلاحظ أن Y تتناسب طردا مع X_1 و عكسا مع X_2، كما أن إنعدام الدخل الشهري لا يعني إنعدام النفقات على الأغذية. وعليه يمكن إقتراح معادلة خطية.

بعد العمليات الحسابية وفق المعادلة (5.46) نحصل على الشكل التالي:

$$7a_0 + 110a_1 + 16a_2 = 249$$
$$1110a_0 + 202300a_1 + 2960a_2 = 43490$$
$$16a_0 + 2960a_1 + 44a_2 = 633$$

وبحل هذه الجملة نجد:

$$a_0 = 11.15$$
$$a_1 = 0.16$$
$$a_2 = -0.93$$

أي أن:

$$Y^* = 11.15 + 0.16\,X_1 - 0.93\,X_2$$

ملاحظة هامة:

حتى يكون النموذج المقترح يمثل بيانات المثال السابق، يجب التأكد من توافق (تقارب) القيم النظرية، المحسوبة إنطلاقا من معادلة التمثيل، من القيم الحقيقية (وهو ما لوحظ في مثالنا هذا)، أما إذا كان العكس، فإنه يجب التفكير في نموذج أخر مثل النموذج التالي:

- **الإرتباط المتعدد ذو الجداء:**

إن النموذج المقترح يأخذ الشكل التالي:

$$Y^* = a_0 X_1^{a1} . a_1 X_2^{a2} . \ldots\ldots\ldots a_{(m-1)} X_m^{am} \qquad (4.47)$$

حيث أن: X_1 ، $X_2 \ldots\ldots X_m$ تمثل المتغيرات الداخلة في معادلة التمثيل.

ولحساب ثوابت هذا النموذج، فإنه يجب تحويله إلى نموذج خطي بإدخال اللوغارتم (نيبري أو عشري)، نتحصل على ما يلي:

$$\ln Y^* = \ln a_0 + a_1 \ln X_1 + a_2 \ln X_2 + \ldots\ldots + a_m \ln X_m$$

فإذا كان لدينا نموذج ذو متغيرين:

$$Y^* = a_0 X_1^{a1} . a_1 X_2^{a2}$$

فإن تحويله يعطي المعادلة التالية:

$$\ln Y = \ln a0 + a1 \ln X1 + a2 \ln X2$$

ولحساب ثوابت هذ المعادلة، نضع $A = \ln a0$ ثم نستخدم الطريقة السابقة بإدخال المجموع على المعادلة:

$$\Sigma \ln Y = nA + a1 \Sigma \ln X1 + a2 \Sigma \ln X2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

نضرب المعادلة الأصلية في lnX1 ثم نجمع وفق قيم **i** فنحصل على مايلي:

$$\Sigma \ln X1 \ln Y = A\Sigma \ln X1 + a1\Sigma(\ln X1)^2 + a2\Sigma \ln X1 \ln X2 \ldots\ldots\ldots\ldots 2$$

نضرب المعادلة الأصلية في lnX2 ثم نجمع وفق قيم i فنحصل على مايلي:

$$\Sigma \ln X2 \ln Y = A\Sigma \ln X2 + a1\Sigma \ln X2 \ln X1 + a2\Sigma(\ln X2)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots 3$$

ولحل هذه الجملة، نستخدم طريقة المصفوفات، أما قيمة a_0 فهي:

$a_0 = e^A$ من أجل اللوغارتم النيبري

$a_0 = 10^A$ من أجل اللوغارتم العشري

- **الإرتباط المتعدد الأسي:**

إن هذا الإرتباط يأخذ الشكل التالي:

$$Y^* = a_0 e^{a1} X_1 . a_1 e^{a2} X_2 . \ldots\ldots\ldots a_m e^{am+1} X_{m+1} \quad (5.48)$$

حيث X_1،X_2، ....X_m هي المتغيرات المستقلة و الهامة. ولحساب ثوابت هذا النموذج، ندخل اللوغارتم على طرفي المعادلة فنحصل على:

$$\ln Y^* = \ln a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots\ldots + a_mX_m$$

بوضع $A_0 = \ln a_0$ ، ومن ثم نستخدم نفس الطريقة السابقة في حالة الإرتباط المتعدد ذو الجداء بمتغيرين مستقلين نحصل على:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma \ln Y = nA_0 + a1\Sigma \ln X_1 + a_2\Sigma \ln X_2 \\ \Sigma(\ln X_1)(\ln Y) = A_0\Sigma \ln X_1 + a_1\Sigma(\ln X_1)^2 + a_2\Sigma(\ln X_1)(\ln X_2).. \\ \Sigma(\ln X1)(\ln Y) = A_0\Sigma \ln X_1 + a_1\Sigma(\ln X_1)^2 + a_2\Sigma(\ln X_1)(\ln X_2) \end{array}\right\} 5.49)$$

هذه الجملة تحل بطريقة المصفوفات كسابقاتها.

• **الإرتباط المتعدد ذو الجداء المختلط:**

إن أشهر مثال على هذا الإرتباط هو دالة كوب دوغلاس المشهورة، والتي تستعمل أساسا في الإقتصاد الجزئي. إن هذا الإرتباط يأخذ الشكل التالي:

$$Y^* = a_0 X_1^{a1} . X2^{a2} . X3^{a3} . e^{a4X4} e^{a5X5} \ldots\ldots(5.50)$$

ولحساب ثوابت هذه المعادلة، ندخل اللوغارتم على الطرفين ثم نستخدم الطريقة السابقة في تشكيل جملة المعادلات. ولدراسة دالة كوب دوغلاس التي تأخذ الشكل التالي:

$$Q = a_0 K^{a1} . L^{a2} . e^{a3t}$$

حيث: t، L، K، هما على التوالي الزمن ومقدار العمل و رأس المال. و Q هي كمية الإنتاج، نأخذ المثال التالي:

يمثل الجدول التالي أرقام حول حجم الإنتاج وكمية رأس المال وكمية العمل لقطاع المحروقات خلال الفترة 1980-2000.

السنة	كمية العمل L	رأس المال K	كمية الإنتاج Q	logL	logK	logQ	logQ.logL	logQ.logK
1980	105	107	101	2,02	2,03	2,00	4,05	4,07
1981	110	114	112	2,04	2,06	2,05	4,18	4,22
1982	118	122	122	2,07	2,09	2,09	4,32	4,35
1983	123	131	124	2,09	2,12	2,09	4,38	4,43
1984	116	138	122	2,06	2,14	2,09	4,31	4,46
1985	125	149	143	2,10	2,17	2,16	4,52	4,68
1986	133	163	152	2,12	2,21	2,18	4,63	4,83
1987	138	176	151	2,14	2,25	2,18	4,66	4,89
1988	121	185	126	2,08	2,27	2,10	4,37	4,76
1989	140	198	155	2,15	2,30	2,19	4,70	5,03
1990	144	208	159	2,16	2,32	2,20	4,75	5,10
1991	145	216	153	2,16	2,33	2,18	4,72	5,10
1992	152	226	177	2,18	2,35	2,25	4,90	5,29
1993	154	236	184	2,19	2,37	2,26	4,95	5,37
1994	149	244	169	2,17	2,39	2,23	4,84	5,32
1995	154	266	189	2,19	2,42	2,28	4,98	5,52
1996	182	298	225	2,26	2,47	2,35	5,32	5,82
1997	196	335	227	2,29	2,53	2,36	5,40	5,95
1998	200	366	223	2,30	2,56	2,35	5,40	6,02
1999	193	387	218	2,29	2,59	2,34	5,34	6,05
2000	193	407	231	2,29	2,61	2,36	5,40	6,17

إن معادلة دالة الإنتاج بدلالة رأس المال و كمية العمل تأخذ الشكل التالي:

$$Y^* = a_0 X_1^{a1} . X_2^{a2}$$

حيث: X_1 تمثل رأس المال و X_2 هو كمية العمل. ولحساب ثوابت هذه المعادلة، فإننا نأخذ الجملة التالية:

$$\Sigma \ln Y = nA_0 + a_1 \Sigma \ln X_1 + a_2 \Sigma \ln X_2$$

$$\Sigma(\ln X_1)(\ln Y) = A_0 \Sigma \ln X_1 + a_1 \Sigma(\ln X_1)^2 + a_2 \Sigma(\ln X_1)(\ln X_2)$$

$$\Sigma(\ln X1)(\ln Y) = A_0 \Sigma \ln X_1 + a_1 \Sigma(\ln X_1)^2 + a_2 \Sigma(\ln X_1)(\ln X_2)$$

حيث: $A_0 = \ln a_0$

وإعتمادا على حسابات الجدول السابق، فإننا نجد:

$$21A_0 + 48.57a_1 + 45.53a_2 = 46.28$$
$$48.57A_0 + 112.98a_1 + 105.20a_2 = 108.05$$
$$45.35A_0 + 105.20a_1 + 98.09a_2 = 100.151$$

وبعد حل هذه الجملة نجد:

$$A_0 = 0 \Rightarrow a_0 = 1$$
$$a_1 = 0.29$$
$$a_2 = 0.71$$

وتكون دالة الإنتاج كما يلي: $Q = K^{0.29}.L^{0.71}$

6.5- الإرتباط الجزئي:

يقصد بالإرتباط الجزئي دراسة العلاقة الإرتباطية بين المتغير المرتبط Y وأحد المتغيرات المستقلة، الداخلة في معادلة التمثيل، على أن تعطى قيم ثابتة لباقي المتغيرات المستقلة (غالبا ما يكون المتوسط الحسابي لقيم المتغير الثابت).

➢ **مثـــــال:**

لنأخذ المعادلة التالية: $Y = 11.15 + 0.16X_1 - 0.93X_2$

يمكن إعطاء قيمة ثابتة لـــ x2 حيث $X_2 = 2$، فتكون المعادلة السابقة كما يلي:

$$Y = 9.29 + 0.16X_1$$

إن هذه المعادلة تعني تأثير المتغير X_1 في Y بفرض أن X_2 يبقى ثابتا.
إن هذا الإرتباط (البسيط) يختلف عن الإرتباط بين Y و X_1 أو بين Y و X_2 على حدى. هذا يعني أنه إذ لم يكن المتغيران X_1 و X_2 مستقلين عن بعضهما تماما فإن معادلة الإرتباط الجزئي لأي من المتغيرين X_1 أو X_2 المستخرجة من

معادلة الإرتباط المتعدد سوف تختلف عن معادلة الإرتباط البسيط لأي منهما بقيم الثوابت المختلفة. وذلك لأنه إذا كان X_1 مرتبطا بـــ X_2 فإن معادلة الإرتباط لأي منهما مع Y سوف تعكس ضمنيا تأثير المتغير الأخر الذي لا تحتويه معادلة التمثيل، أما في معادلة الإرتباط الجزئي فتعتبره ثابتا.

1.6.5- معاملات الإرتباط الجزئية:

لدراسة قوة الإرتباط الجزئي لــ Y بأحد المتغيرات المستقلة الداخلة في معادلة التمثيل، نقوم بحساب معاملات الإرتباط الجزئية وفق العلاقات التالية:

$$r_{1(2)} = \frac{(r_1 - r_2.r_{12})}{\sqrt{(1-r_2^2)(1-r_{12}^2)}} \quad (5.51)$$

معامل الإرتباط الجزئي لــ X_1 بحيث X_2 ثابتا:

$$r_{2(1)} = \frac{(r2 - r_1.r12)}{\sqrt{(1-r_1^2)(1-r_{12}^2)}} \quad (5.52)$$

:معامل الإرتباط الجزئي لــ X_2، X_1 ثابتا

بينما r_1 و r_2 هما معاملات الإرتباط الثنائية بين المتغيرين Y و X_1 و X_2، في حين r_{12} هو معامل الإرتباط بين X_1 و X_2.

مثال: لنفرض معاملات الإرتباط التالية:

$$r_1 = 0.91, r_2 = 0.88 , r_{21} = 0.96$$

يمكن حساب معاملات الإرتباط الجزئية وفق العلاقة (3.46) و (3.47) فنجد:

$$r1_{(2)} = 0.49, \qquad r2_{(1)} = 0.05 ,$$

أما معامل الإرتباط المتعدد فيمكن حسابه وفق العلاقة (3.38):

$$r_{y(x_1x_2)} = \sqrt{\frac{r^2_1 + r^2_2 - 2r_1r_2r_{12}}{1 - r^2_{12}}} = 0.92$$

نلاحظ أن $r2(1)$ صغيرة جدا مما يعني أن تأثير X_2 بمعزل عن X_1 يعتبر ضعيفا وهو ما يبدو منطقيا لأن r_{21} كبير جدا.

2.6.5- تطبيقات الإرتباط المتعدد في المجال الاقتصادي:

إن معادلة التمثيل ما هي إلا نموذجا رياضيا يساعد على حل الكثير من المشاكل، من بينها النماذج المستعملة في الإقتصاد. فيمكن حساب:

- **المرونة الحدية النسبية:**

وتحسب وفق العلاقة التالية:

(5.53) $\frac{\delta Y}{\delta X_k}$ وتمثل السرعة المطلقة لتزايد دالة الإنتاج Y بتزايد X_k

- **المرونة النسبية:**

وهي مرونة دالة الإنتاج بالنسبة للمتغير X وتعطى بالعلاقة التالية:

(5.54) $E_k = \frac{\delta Y}{\delta X_k} \cdot \frac{X_k}{Y}$ وتمثل السرعة النسبية لتزايد دالة الإنتاج Y بتزايد X_k

- **المرونة الكلية:**

وهي مجموع المرونات النسبية، تعطى بالعلاقة التالية:

(5.55) $E = \sum_{k=1}^{m} E_k$ ، حيث m عدد المتغيرات الداخلة في معادلة التمثيل.

- **المنفعة المتوسطة للمتغير X:**

وتعطى بالعلاقة التالية:

$$\frac{Y}{X_k} \qquad (5.56)$$

تمارين مختارة

التمرين الأول:

عند دراسة علاقة متوسط إرتفاع أشجار الصنوبر في غابة ما بعمر أشجار تلك الغابة، تحصلنا على المعطيات التالية:

العمر X	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
الإرتفاع	9.3	14.1	18.3	21.8	24.2	26.3	28.1	29.6	30.9	32	32.9

- حول ابيانات التالية إى إرتباط خطي بسيط،
- أحسب معامل الإرتباط ثم إختبر معنويته،
- هل يمكن أن يعطي النموذج الخطي أحسن تفسير لهذه العلاقة؟، ماذا تقترح؟،
- لنفترض أن النموذج اللوغارتمي هو الذي يعطي التفسير الأحسن لطبيعة هذه العلاقة، بين كيف ذلك،
- شكل هذا النموذج، أحسب معامل تحديده ثم أختبر معنويته.

التمرين الثاني:

لنفترض أنه لدينا المعطيات التالية عن ستة مؤسسات إنتاجية:

المؤسسة	1	2	3	4	5	6
كمية الإنتاج بآلالاف القطع	2	3.5	4	4.5	5.5	6
قيمة الأصول الثابتة بالمليون	1.9	1.7	1.8	1.6	1.5	1.4

المطلوب:

- إختيار المعادلة الملائمة لتمثيل هذه العلاقة،
- حساب القيم النظرية لكمية الإنتاج،
- حساب معامل التحديد و إختبار موضوعيته،
- أرسم الخط البياني لهذه العلاقة الإرتباطية.

التمرين الثالث:

إذا كانت 100 درجة حرارة مئوية تقابل 212 درجة مقدرة بالفهرنهايت، في حين أن درجة الصفر في المئوية تقابلها 32 في وحدة الفهراهايت. على افتراض وجود علاقة خطية بين وحدة الدرجة المئوية وحدة الفهرنهيايت، أوجد:

- المعادلة التي تربط بين الوحدتين (افترض أن المئوية تمثلX)
- ما هي القيمة التي تقابل 80 درجة مئوية،
- ما هي القيمة التي تقابل 68 فهرنهايت.

التمرين الرابع:

عينة حجمها 18 ومعامل إرتباطها 0.32. هل يمكن أن نستنتج عند مستوى المعنوية 5% و1 % أن معامل الإرتباط في المجتمع يختلف عن الصفر؟. أوجد أصغر قيمة لـــ n حتى يكون معامل إرتباط العينة السابق يختلف معنويا عن الصفر(α =% 5).

التمرين الخامس:

لتكن لدينا البيانات التالية:

X_1	64	71	53	67	55	58	77	57	56	51	76	68
X_2	57	59	49	62	51	50	55	48	52	42	61	57
X_3	8	10	6	11	8	7	10	9	10	6	12	9

المطلوب:

- أوجد العلاقة الإرتباطية التي تجمع بين X_1 كمتغير مرتبط و X_2،X_3.
- أحسب عندئذ معاملات الإرتباط الزوجية المقابلة،
- أحسب قيمة معامل الإرتباط المتعدد،
- أحسب معامل التحديد ثم أختبر معنويته،
- قدر قيمة X_1 عند $X_2 = 54$ و $X_3 = 9$.

الفصل السادس
السلاسل الزمنية و تحليلها

مقدمة:

إن الكثير من الظواهر، خاصة الإجتماعية و الإقتصادية، تتغير بتغير الزمن الذي هو بحد ذاته متغير موضوعي مستقل. وبما أن الزمن ملازم للظواهر فيمكننا أن نربط بين حالة أية ظاهرة و بين اللحظة التي تقابل هذه الحالة أو بين مجمل تطورات ظاهرة و بين الفترة الزمنية التي جرت فيها تلك التطورات.

1.6 -تعريف السلسلة الزمنية:

هي عبارة عن سلسلة من القيم العددية لمؤشر إحصائي يعكس تغير ظاهرة ما بالنسبة للزمن، بحيث أن لكل قيمة لإحصائية فترة زمنية تقابلها. يكون متغير الزمن t متغيرا مستقلا تقابلها قيمة إحصائية مرتبطة Y_t.

2.6 - نواع السلاسل الزمنية:

يمكن أن نميز نوعين من السلاسل الزمنية:

- **السلاسل الزمنية الأنية:** وهي السلاسل الزمنية التي حدودها Y_t تقابل لحظات زمنية معينة. مثل عدد سكان مدينة ما في أحد أيام السنة.
- **السلاسل الزمنية المديدة:** وهي السلاسل الزمنية التي حدودها Y_t تقابل فترات زمنية معينة. مثل كمية الإنتاج خلال شهر أو عدد المواليد خلال سنة.

3.6- مؤشرات السلسلة الزمنية:

يستخدم في تحليل السلاسل الزمنية عدد من المؤشرات الإحصائية التي تحدد مقدار واتجاه و سرعة تغير الظاهرة المدروسة عبر الزمن، وهي:

ا)– **الزيادة المطلقة:** مقدار زيادة أو نقصان حدود السلسلة الزمنية خلال فترة زمنية معينة، و تعطى بالعلاقة التالية:

$$\Delta Y_{tk} = Y_t - Y_{t-k} \qquad (6.1)$$

حيث Y_t هو حد السلسلة التي تقابل الفترة t و Y_{t-k} حد السلسلة التي تقابل الفترة $t-k$، يسمى هذا الحد بالحد الأساسي. إذا كان $k=1$ فإن:
$\Delta Y_{t1} = Y_t - Y_{t-1}$.

➢ **مثـــــال:**

يمثل الجدول التالي إنتاج الكهرباء في محطة توليد:

السنة	كمية الإنتاج (ألف كيلوواط / الساعة)	التزايدات المطلقة $\Delta Y_{t1} = Y_t - Y_{t-1}$	التزايدات المطلقة بالنسبة لعام ΔY_{t70}1970
1970	741	800-741=59	800-741=59
1971	800	857-800=57	857-741=116
1972	857	915-857=58	915-741=174
1973	915		

كيفية حساب الزيادة المطلقة في سلسلة زمنية.

ب)– معدل النمو: و يعطى بالعلاقة التالية:

$$T_{tk} = \frac{Y_t}{Y_{t-k}}100 \qquad (6.2)$$

، حيث Y_{t-k} يمثل الحد الأساسي،

إذا كان: $K=1$ فإن : $T_{t1} = \frac{Y_t}{Y_{t-1}}100$،

نسمي الكميات T_{t1} بمعدلات النمو المتتالية.

- إذا كانت $Tt1>100$ فإن الحدود تكون متزايدة،
- إذا كانت $Tt1=100$ فإن الحدود تكون ثابتة،
- إذا كانت $Tt1<100$ فإن الحدود تكون متناقصة.

في المثال السابق (جدول 1.6) نجد معدلات نمو الإنتاج المتتالية:

$$T_{2i} = \frac{800}{741}.100 = 107.96\% \; ; \quad T_{3i} = \frac{857}{800}.100 = 107.13\% \; ;$$

$$T_{2i} = \frac{915}{857}.100 = 106.77\%.$$

ج)- معدل الزيادة النسبية: ويعرف بالعلاقة التالية:

$$m_{tk} = \frac{Y_t - Y_{t-k}}{Y_{t-k}} 100 \qquad (6.3)$$

إذا كان: K=1 فإن $m_{t1} = \frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}} 100$، وهو يمثل مقدار تزايد النسبة المئوية للحد Y_t بالنسبة للأساس Y_{t-k}

د)- المتوسط الحسابي لحدود سلسلة زمنية: و يعطى بالعلاقة التالية:

$$\overline{Y} = \frac{\sum_{t=1}^{n} Y_t}{n} \qquad (6.4)$$

هـ)- المتوسط التوافقي لحدود سلسلة زمنية: يعطى بالعلاقة التالية:

$$\overline{Y}_H = \frac{1/2\,Y_1 + Y_2 + \ldots . Y_{n-1} + 1/2\,Y_n}{n-1} \qquad (6.5)$$

و)- متوسط الزيادة المطلقة: يعطى بالعلاقة التالية:

$$\Delta\overline{Y} = \frac{Y_n - Y_1}{n-1} \qquad (6.6)$$

ي)- متوسط معدل النمو: ويعطى بالعلاقة التالية:

$$\overline{T} = \sqrt[n-1]{\frac{Y_n}{Y1}}.100 \qquad (6.7)$$

ك)- متوسط معدل الزيادة النسبية:

$$\overline{m} = (\overline{T} - 100)\ \% \qquad (6.8)$$

4.6- تحليل السلسلة الزمنية:

يبدأ تحليل الزمنية على إيجاد المسار العام لتطور الظاهرة بدلالة الزمن، وذلك من خلال رسم شكل الإنتشار بأخذ عامل الزمن كمتغير مستقل، في حين تشكل قيم الظاهرة المدروسة المتغير المرتبط. ونسمي توصيل نقاط الانتشار فيما بينها بالمنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية.

1.4.6- تغيرات الإتجاه العام:

وهي التغيرات التي تعكس مسار تطور الظاهرة المدروسة عبر الزمن، وهي تعطي فكرة واضحة عن تزايد أو تناقص السلسلة الزمنية، بغض النظر عن جميع الإنحرافات أو التقلبات.

تشبه معادلة الأتجاه العام تلك التي تم تقديمها في نظرية الإرتباط (الفصل الثالث)، يكون فيها عامل الزمن هو المتغير المستقل. وتأخذ، في الغالب، أحد الأشكال التالية:

$$Y^* = a_0 + a_1 t$$
$$Y^* = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$
$$Y^* = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$
$$Y^* = a_0 + a1 \ln t$$
$$Y^* = a_0 + \frac{a_1}{t}\ ;\ \ Y^* = a_0 t^{a1}$$

إن عملية إختيار معادلة التمثيل عملية صعبة، لكون بيانات السلسلة الزمنية متذبذبة، ولذلك فلابد من تسوية هذا التذبذب.

- **المتوسطات المتحركة:**

لعل من أهم طرق تسوية تذبذب السلسلة الزمنية هي المتوسطات المتحركة. لنفرض أنه لدينا السلسلة الزمنية التالية:

$$Y: y_1 \quad y_2 \quad y_3 \ldots \quad y_t \ldots \quad y_n$$
$$t: t_1 \quad t_2 \quad t_3 \ldots \ldots t_t \ldots \ldots t_n$$

إن المتوسط المتحرك بطول 3 يكون وفق العلاقة التالية:

$$\overline{Y}_2 = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{3}$$ يقابل اللحظة الزمنية: $$\overline{t}_2 = \frac{t_1 + t_2 + t_3}{3}$$

$$\overline{Y}_3 = \frac{Y_2 + Y_3 + Y_4}{3}$$ يقابل اللحظة الزمنية: $$\overline{t}_3 = \frac{t_2 + t_3 + t_4}{3}$$

$$\overline{Y}_{n-1} = \frac{Y_{n-2} + Y_{n-1} + Y_n}{3}$$ يقابل اللحظة الزمنية: $$\overline{t}_{n-1} = \frac{t_{n-2} + t_{n-1} + t_n}{3}$$

وهكذا نحصل في الأخير على سلسلة زمنية جديدة أقل تذبذبا من الأولى، وحدودها هي المتوسطات المتحركة المحسوبة سابقا مع أزمنتها.

وبصفة عامة، فإن عدد حدود المتوسطات المتحركة يكون مساويا إلى طور التغيرات الدورية (عدد النتوءات في المنحنى التاريخي)، فإذا كان طور التغيرات هو P فإن علاقة المتوسط المتحرك يأخذ العلاقة التالية:

$$\overline{Y}_{j+\frac{p}{2}} = \frac{\sum_{t=j}^{j+p-1} Y_t}{P} \qquad (6.9)$$

حيث: $j = 1, 2, \ldots, n-p$

➢ **مثـــــال:**

لنفترض أنه لدينا السلسلة الزمنية التالية:

السنة	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
إنتاج الغاز(م،م3)	9,5	8,2	8,2	5,9	9,9	5,5	12	8,9	12,2	10

نلاحظ بعد رسم المنحنى التاريخي وجود عدد كبير من النتوءات والتذبذبات، لذلك يمكننا التقليل منها باستخدام المتوسطات المتحركة (بطول3). بعد الحسابات نجد مايلي:

السنة	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
إنتاج الغاز(م،م3)	9,5	8,2	8,2	5,9	9,9	5,5	12	8,9	12,2	10
المتوسطات المتحركة		8,63	7,43	8,00	7,10	9,13	8,80	11,03	10,37	

من خلال المنحنى (الشكل السابق) نلاحظ أن شكل إنتشار السلسلة بدا أكثر وضوحا من شكل الإنتشار الأساسي، مما يساعدنا على إختيار نوع معادلة التمثيل.

ولإيجاد قيم ثوابت معادلة التمثيل، فإننا نعتمد على طريقة المربعات الصغرى، ونستخدم نفس الأسلوب المتبع في دراسة الإرتباط البسيط والإرتباط المنحنى*.

في المثال السابق، يمكن إيجاد معادلة الإتجاه العام، بفرض أن السلسلة الزمنية تأخذ معادلة مستقيم، فنجد:

$$Y = 0,3024t + 7,3667$$

(باستعمال البيانات الأولية) حيث أن: $R^2 = 0,16$

$$Y = 0,4184t + 6,968$$

(باستعمال بيانات المتوسطات المتحركة) حيث أن: $R^2 = 0,60$

---

*يمكن للقارئ أن يعود إلى هذه المعادلات التي تعرضنا إليها بالتفصيل في الفصل الثالث (نظرية الإرتباط)

2.4.6- التغيرات الدورية:

وهي التغيرات الناجمة عن تأثير القوى الدورية و التي تظهر دوريا من حين لأخر، ويظهر تأثيرها على قيم السلسلة الزمنية على شكل تزايد لهذه القيم (أو تناقص) حتى تبلغ قيمة عظمى (أو صغرى)ن أي على شكل نتوءات.

إن دراسة وإظهار التغيرات الدورية في تطور السلسلة الزمنية يمكن أن يكون بطريقتين:

- **طريقة الإنحرافات النظرية:**

وتعتمد على حساب إنحرافات القيم النظرية، المحسوبة من خلال معادلة التمثيل، عن القيم الحقيقة، أي أن: $Z_t = Y_t - Y_t^*$ ومن ثم تمثيل هذه الإنحرافات بواسطة معادلة تمثيل تأخذ شكلا جيبيا.

- **طريقة المتوسطات المتحركة:**

وتعتمد على حساب المتوسطات المتحركة وفق المعادلة (6.9). فتكون قيم Z كما يلي:

$$Z_{j+\frac{p}{2}} = Y_{j+\frac{p}{2}} - Y^*_{j+\frac{p}{2}} \qquad (6.10)$$

حيث أن: $(j = 1,2......n-p)$ و $Y_{j+\frac{p}{2}}$ هي القيم الحقيقية التي تقابل اللحظة $t = j + \frac{p}{2}$.

إن معادلة تمثيل التغيرات الدورية تأخذ الصيغة التالية:

$$Y_t = a_0 + f(\sin\theta_t, \cos\theta_t) \qquad (6.11)$$

الخطوات: لنفترض السلسلة الزمنية التالية:

$$Y: y_1 \quad y_2 \quad y_3 \ldots \quad Y_t \ldots \quad y_n$$
$$t: t_1 \quad t_2 \quad t_3 \ldots\ldots\ldots\ldots t_t \ldots\ldots t_n$$

يمكن إجراء تحويل المتغير t إلى المتغير θ وذلك وفق المعادلة التالية:

$$\theta_t = \frac{t - t_0}{t_n - t_0} 2\pi \qquad (6.12)$$

تتحصل على سلسلة جديدة بدلالة θ حيث:

$$Y: y_1 \quad y_2 \quad y_3 \ldots Y_t \ldots \quad y_n$$
$$\theta: \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \ldots\ldots \theta_t \ldots\ldots \theta_n$$

فإذا كانت السلسلة الزمنية مكونة من m دورة فإن معادلة تمثيل التغيرات الدورية تعطى بالعلاقة التالية:

$$Y_t^* = a_0 + \sum_{k=1}^{m} (a_k \sin k\theta_t + b_k \cos \theta_t) \qquad (6.13)$$

أما ثوابت هذه المعادلة فيمكن حسابهم من العلاقات التالية:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} Y_t \\ a_k = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^{n} Y_t \sin k\theta_t \, , \quad k = 1,2\ldots m \, , \\ b_k = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^{n} Y_t \cos k\theta_t \\ k = 1,2\ldots m \end{array}\right\} \qquad (6.14)$$

الخطوة الأخيرة، بعد إيجاد معادلة تمثيل التغيرات الدورية، تتمثل في إضافة هذه المعادلة إلى المعادلة العامة للسلسلة الزمنية، أي أن:

$$\hat{Y}_t = \tilde{Y}_t + Y_t^* \qquad (6.15)$$

مع الإشارة إلى أن: $\hat{Y}$ هي القيمة الحقيقية للسلسلة الزمنية، $\tilde{Y}$ هي قيمة الإتجاه وY^* هي قيمة التغيرات الدورية.

➢ **مثـــــال:**

يمكننا حساب قيم التغيرات الدورية من المثال السابق:

السنة	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1971	المجاميع
t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
إنتاج الغاز Y(م3,م)	9,5	8,2	8,2	5,9	9,9	5,5	12	8,9	12,2	10	90,3
θ	0	40	80	120	160	200	240	280	320	360	
2θ	0	80	160	240	320	400	480	560	640	720	
sinθ	0	0,64	0,98	0,87	0,34	-0,34	-0,87	-0,98	-0,64	0	
Ysinθ	0,00	5,27	8,08	5,11	3,39	-1,88	-10,39	-8,76	-7,84	0	-7,04
sin2θ	0,00	0,98	0,34	-0,87	-0,64	0,64	0,87	-0,34	-0,98	0	
Ysin2θ	0	8,08	2,80	-5,11	-6,36	3,54	10,39	-3,04	-12,01	0	-1,72
cosθ	1	0,77	0,17	-0,50	-0,94	-0,94	-0,50	0,17	0,77	1	
cos2θ	1	0,17	-0,94	-0,50	0,77	0,77	-0,50	-0,94	0,17	1	
Ycosθ	9,5	6,28	1,42	-2,95	-9,30	-5,17	-6,00	1,55	9,35	10	14,68
Ycos2θ	9,5	1,42	-7,71	-2,95	7,58	4,21	-6,00	8,36	2,12	10	9,82

فإذا فرضنا أن السلسلة السابقة مكونة من 2 دورات (أي أن $m = 2$)، فإن معادلة تمثيل التغيرات الدورية تعطى بالعلاقة التالية:

$$Y^* = a_0 + a_1 \sin \theta_t + b_1 \cos \theta_t + a_2 \sin 2\theta_t + b_2 \cos 2\theta_t$$

نقوم بحساب ثوابت هذه المعادلة من خلال العلاقة (6.14)، فنحصل على مايلي:

$$= \frac{1}{10} 90.3 = 9.03 \quad a_0 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t$$

$$a_k = \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t \sin k\theta_t$$

$$a_2 = \frac{2}{10}(-1.72) = -0.34 \qquad , \quad a_1 = \frac{2}{10}(-7.04) = -1.40$$

$$, \qquad b_k = \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t \cos k\theta_t$$

$$, \qquad b_2 = \frac{2}{10} 9.82 = 1.96 \qquad b_1 = \frac{2}{10} 14.68 = 2.90$$

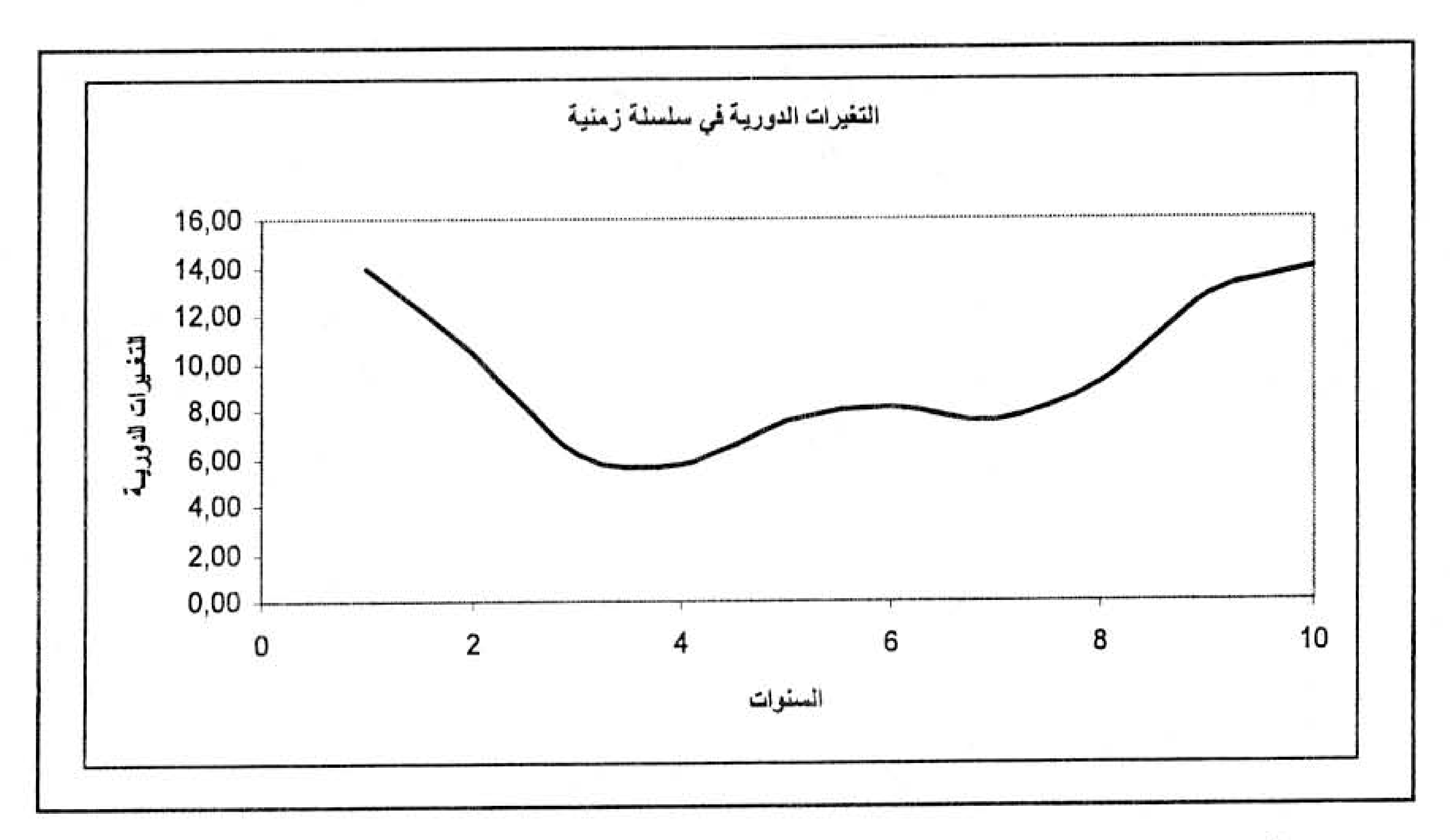
نتحصل بعد التعويضات على المعادلة التالية:

$$Y^* = 9.03 - 1.40\sin\theta_t + 2.90\cos\theta_t - 0.34\sin 2\theta_t + 1.96\cos 2\theta_t$$

نلخص قيم التغيرات الدورية بعد تعويض قيم θ في المعادلة فنحصل على الجدول التالي*:

Y*	13,89	10,36	6,20	5,68	7,55	8,07	7,52	9,19	12,83	13.89

* في مثالنا السابق، كان من المفروض أن يكون عدد الدورات مساويا لـ 4، أي بعدد النتوءات، ولتسهيل الحسابات، افترضنا وجود دورتين ، فيمكن للقارئ الحصول على منحنى بأربع دورات إذا أخذ m = 4



3.4.6-- التغيرات الموسمية:

وهي التغيرات الناتجة عن تأثير الفصول خلال السنة أو تأثير الأشهر خلال الفصول أو تأثير الأيام خلال الأشهر. إن دراسة التغيرات الموسمية تشبه إلى حد كبير التغيرات الدورية، فما هي في الحقيقة إلا تغيرات دورية ولكنها مرتبطة بفصول السنة أو الأشهر. فمثلا إرتفاع كمية إستهلاك الغاز خلال موسم الشتاء، ولعدة سنوات متتالية فإذا فرضنا السنة تتكون من 4 فصول، فإنه يمكن تكرار ما جاء في دراسة التغيرات الدورية مع الإشارة أن قيمة m يجب أن تأخذ عدد المواسم.

4.4.6- التغيرات العشوائية:

وهي التغيرات الناجمة عن تأثير قوى عرضية كالزلازل والحروب والإضطرابات العمالية...الخ، ولذلك يمكن إرجاعه إلى خطأ مرتكب يمكن تقديره. وعليه تكون معادلة تمثيل السلسلة الزمنية كما يلي:

$$f(t) = \tilde{Y}(t) + Y^*(t) + \varepsilon(t) \qquad (6.15)$$

حيث $\tilde{Y}(t), Y^*(t), \varepsilon(t)$ هي على التوالي: معادلة الإتجاه العام، معادلة التغيرات الدورية والتغيرات الموسمية معا ومعادلة التغيرات العرضية. ونظرا لصعوبة تقدير التغيرات العرضية وصعوبة تمثيلها رياضيا لكونها عرضية، فإنه

يستحسن تقديرها بمعرفة مركبات المعادلة (6.15) على أساس أن f(t) هي القيمة الحقيقية للسلة الزمنية وأن $\tilde{Y}(t)$ و $Y^*(t)$ تم حسابهم آنفا.

5.6-التنبؤ:

التنبؤ هو إعطاء قيمة زمنية في معادلة تمثيل الإتجاه العام، غير موجودة في السلسلة، من أجل الحصول على قيمة سلسلة زمنية مقابلة لهذه اللحظة. وينقسم إلى:

1.5.6- التنبؤ الداخلي:

هو إعطاء قيمة غير موجودة في السلسلة الزمنية ومقابلة للحظات الزمنية التي تقع داخل المجال الزمني للسلسلة،

2.5.6- التنبؤ الخارجي:

ويهدف إلى إيجاد قيم مجهولة للسلسلة مقابلة للحظات الزمنية التي تقع خارج المجال الزمني للسلسلة.

3.5.6- طرق التنبؤ:

1.3.5.6- طريقة التمديد:

وتعتبر أسهل طرق التنبؤ، وتعتمد على معادلة الإتجاه العام من خلال إعطاء قيم للزمن في معادلة التمثيل. وينجم عن عملية التنبؤ كمية من الخطأ يمكن تقديرها بحساب تباين الخطأ S_{yy^*}، ولذلك يمكن حساب كذلك مجال ثقة هذا التنبؤ باحتمال معلوم حيث:

$$\left[\tilde{Y} - ZS_{yy^*}, \tilde{Y} + ZS_{yy^*}\right] \qquad (6.16)$$

حيث أن $\tilde{Y}$ هي القيمة التقديرية للسلسلة الزمنية وZ هو الإحتمال المعلوم. غير أن هذه الطريقة لا تصلح للتنبؤات الطويلة الأمد لأنها تفترض أن الخطأ المرتكب يبقى ثابتا، وهذا ما يتنافى مع الواقع، إذ أن الخطأ يزداد كلما إزداد مدى التنبؤ.

2.3.5.6- طريقة الخطأ المتزايد:

في هذه الطريقة يرتبط الخطأ المرتكب بعدد حدود السلسلة الزمنية n وبمدى التنبؤ l، ويكون الخطأ النسبي:

$$\varepsilon pr = \left|\frac{Yn+l - Y'n+l}{Yn+l}\right|.100 \qquad (6.17)$$

حيث أن: Y_{n+l} هي القيمة الحقيقية التي نريد التنبؤ عنها والتي تقابل اللحظة n+l و أن Y'_{n+1} هي القيمة التقديرية المتنبأ بها. فإذا كان L هو عدد التنبؤات، فإن متوسط الخطأ النسبي هو:

$$\overline{\varepsilon}pr = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\left|\frac{Yn+l - Y'n+l}{Yn+l}\right|.100 \qquad (6.18)$$

وحيث أن Y_{n+1} تبقى دوما مجهولة فإن يتعذر حساب مقدار $\overline{\varepsilon}pr$. ولذلك نلجأ الى طريقة تطبيقية تمكننا من حساب المعادلة (6.18)، و تتلخص فيما يلي:

لنفترض أنه لدينا السلسلة الزمنية التالية:

$$Y: y_1 \quad y_2 \quad y_3 .... \quad Y_t ... \quad y_n$$
$$t: 1 \quad 2 \quad 3 .... n$$

1 - تقسم السلسلة الزمنية إلى قسمين حسب قيمة n. ويمكن أن نميز:

إذا كان n زوجي، فإن السلسلة تقسم إلى $\frac{n}{2}$ حدا. أما إذا كان n فردي فإن السلسلة تقسم إلى $\frac{n+1}{2}$ حدا و $\frac{n-1}{2}$ حد. نأخذ القسم الأول ونعتبره سلسلة زمنية مستقل عن القسم الثاني،

2- نقوم بإيجاد معادلة التمثيل للقسم الأول على أن نتنبأ بقيم القسم الثاني لنتحصل على قيمه النظرية والتي تختلف عن قيم القسم الأول (قيم حقيقية)،

2- نقوم بحساب الأخطاء النسبية التي من شأنها ترتكب من جراء عملية التنبؤ وفق العلاقة (6.18) ومن ثم نحسب متوسط هذه الأخطاء وفق العلاقة (6.19)، حيث أن L هو عدد الحدود المتنبأ بها،

4- نقوم بتسجيل قيم $\bar{\varepsilon}_{pr}$ التي توافق عدد الحدود L،

5- نضيف إلى حدود القسم الأول حدا إضافيا من القسم الثاني فنحصل من جديد على سلسلتين، الأولى بها (n_L+1)حدا، و الثانية على$(n-(n_{L+1}))$ حدا،

6- نكرر الخطوات 2،3،4،5 حتى الوصول إلى معظم حدود القسم الثاني من السلسلة. نشكل معادلة التمثيل التالية: $\tilde{\bar{\varepsilon}} = f(n,L)$ ، وهي تقدير لقيم متوسط الأخطاء النسبية بدلالة n و L.

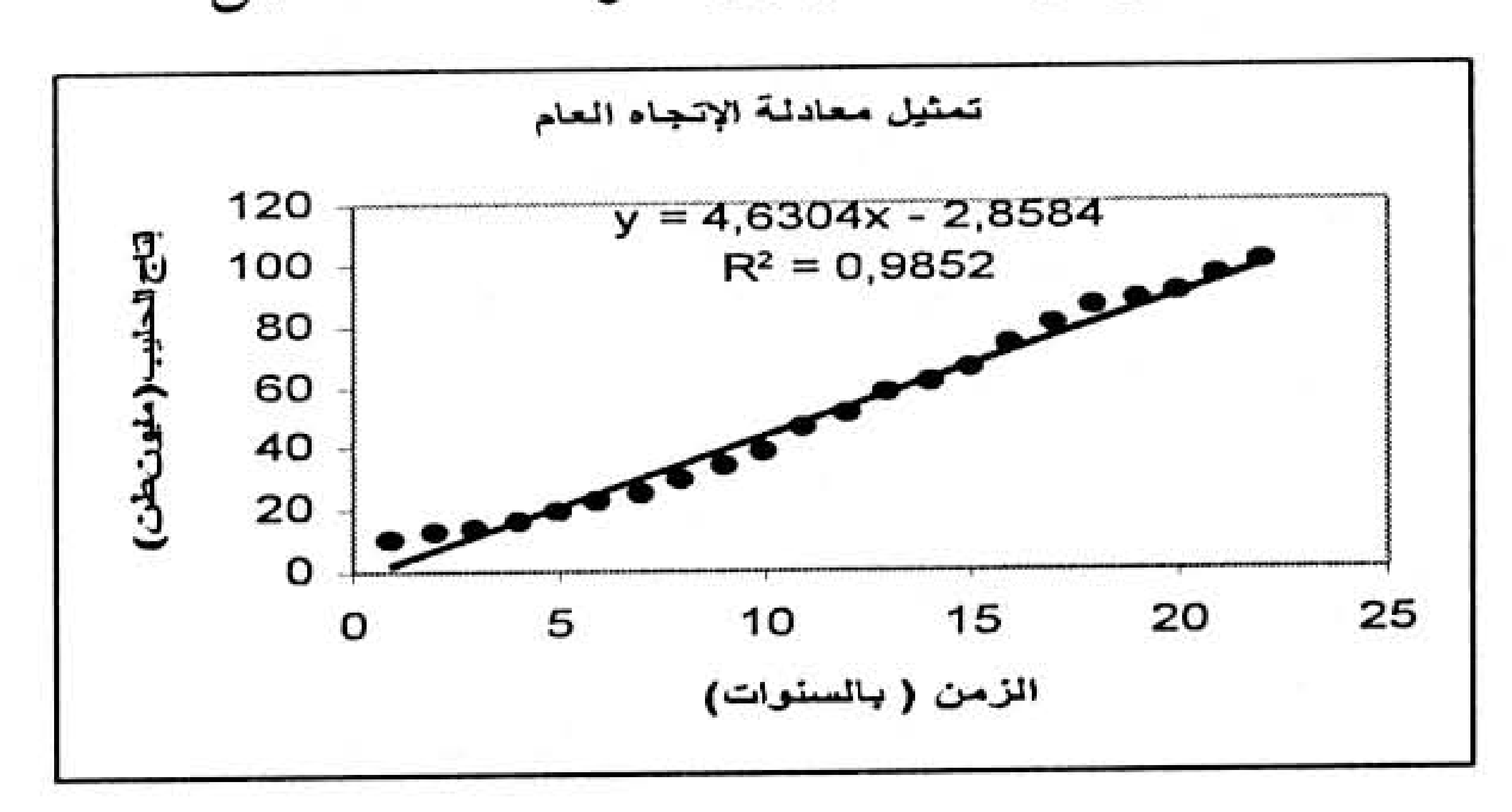
➢ مثـــــال:

يمثل الجدول 2 بيانات سلسلة زمنية عن إنتاج الحليب في منطقة ما. نريد أن نتبأ على هذا الإنتاج إلى ما بعد 2001.

يمكن إيجاد معادلة الإتجاه العام بطريقة المربعات الصغرى، حيث أن t هو المتغير المستقل و إنتاج الحليب هو المتغير المرتبط، فنجد:

$$Y^* = -2.85 + 4.53t$$

حيث أن $R^2 = 0.98$، وهو ما يشير إلى جودة هذا التمثيل.



وقبل حساب هذا التنبأ، يجب معالجة الأخطاء المرتكبة عنه. نتائج هذه المعالجة مبينة في الجدول التالي الذي يمثل نتائج طريقة الخطأ المتزايد:

جدول انتاج الحليب لمنطقة ما من سنة 1980 إلى سنة 2001

السنة	t	انتاج الحليب (م,طن)	الحالة الأولى εpr	الحالة الثانية εpr	الحالة الثالثة εpr	الحالة الرابعة εpr	الحالة الخامسة εpr	الحالة السادسة εpr	الحالة السابعة εpr
1980	1	10,2	$Y^* = 3.74 + 3.40t$	$Y^* = 2.67 + 3.53t$	$Y^* = 1.51 + 3.88t$	$Y^* = 0.81 + 4.02t$	$Y^* = 0.32 + 4.11t$	$Y^* = -0.44 + 4.25t$	$Y^* = -1.4 + 4.41t$
1981	2	12,1							
1982	3	13,9							
1983	4	16							
1984	5	19							
1985	6	22,5							
1986	7	24,9							
1987	8	28,9							
1988	9	33,3							
1989	10	38,3							
1990	11	45,5							
1991	12	50,9	12,6						
1992	13	57,3	16,6	12,7					
1993	14	61	16,1	12,1	8,4				
1994	15	64,9	15,9	11,7	7,9	5,7			
1995	16	72,4	19,9	15,9	12,2	9,9	8,6		
1996	17	80	23,3	19,3	15,6	15,6	12,1	10,1	
	18	84,8	23,6	19,6	15,8	13,6	12,1	10,3	8
1998	19	87,5	22,1	17,9	13,9	11,7	10,2	8,1	5,7
1999	20	89,7	20,2	15,8	11,7	9,3	7,8	5,6	3,1
2000	21	95,2	21	16,9	12,8	10,3	8,8	6,6	4,1
001	22	100,3	21,8	17,4	13,4	10,9	9,4	7,1	4,6
متوسط الخطأ لتنبؤات $\overline{\varepsilon}pr$			19,4	15,9	12,4	10,6	9,9	8	5,1
عدد حدود السلسلة المدروسة n_L			11	12	13	14	15	16	17
عدد حدود المتنبأ بها L			11	10	9	8	7	6	5

نلاحظ أن السلسلة الزمنية قسمت إلى قسمين متساوين، لكل قسم 11 حدا، ثم قمنا بتشكيل معادلة الاتجاه للقسم الثاني والتي هي: $Y^{*} = 3.74 + 3.40t$. بتعويض قيم t في هذه المعادلة من عام 1961 إلى 1971، نكون قد تنبأنا بقيم الإنتاج خلال هذه الفترة. قمنا بحساب الأخطاء المرتكبة التي دونت في خانة الحالة الأولى وفق المعادلة (6.18)، ومن ثم قمنا بحساب متوسط الأخطاء الذي يساوي: $\bar{\varepsilon}_{pr}=19.4$. هذه القيمة تقابل11 حدا من حدود السلسلة المدروسةn_L و11 حدا أخر من حدود المتنبأ بها L .

نظيف حد إلى الحدود الأحدى عشرة الأولى ومن ثم تبحث عن معادلة التمثيل لـــ12 حدا ونكرر الخطوات السابقة. دونت النتائج في الجدول رقم 2 السابق.

نتحصل في الأخير على الجدول التالي الذي يعطي قيم $\bar{\varepsilon}_{pr}$ بدلالة nL وL:

$\bar{\varepsilon}_{pr}$	n_L	L
19.4	11	11
15.9	12	10
12.4	13	9
10.6	14	8
9.9	15	7
8	16	6
5.1	17	5

يمكننا تشكيل معادلة خطية ثنائية (إرتباط ثنائي) إنطلاقا من هذه البيانات فنجد:

$$\tilde{\bar{\varepsilon}} = 3.86 - 0.44n_L + 1.74L$$

حيث أن R=0.98 (معامل الإرتباط المتعدد).

إن هذه المعادلة تعني أنه إذا إزداد عدد الحدود المدروسة n_L بمقدار حد واحد، فإن متوسط الخطأ $\tilde{\bar{\varepsilon}}$ ينقص بمقدار0.44 % وأنه إذا إزداد مدى التنبؤ (عدد الحدود المتنبأ بها L) بمقدار سنة واحدة فإن $\tilde{\bar{\varepsilon}}$ يزداد بمقدار 1.74 %.

فعندما نريد حساب كمية إنتاج الحليب لسنة 2005، فإن هذا يعني أخذ $t = 25$، يكون:

$$Y^{*} = -2.85 + 4.53(25) = 110.4 \text{ (م.طن)}$$

أما مجال ثقة هذا التنبؤ هو:

$]\tilde{Y} - ZS_{yy^*}, \tilde{Y} + ZS_{yy^*}[$ وحيث أن الخطأ المرتكب في هذه الحالة غير ثابت، بل هو مرتبط بعدد الحدود المدروسة n_L وعدد الحدود المتنبأ بها L، فإنه من الأفضل إستخدام معادلة تمثيل متوسط الخطأ، أي أن:

$$\left[Y^*_{n+L} - Z\frac{\overline{\varepsilon}_{pr}Y^*}{100}, Y^*_{n+L} + Z\frac{\overline{\varepsilon}_{pr}Y^*}{100}\right] \qquad (6.19)$$

والذي يساوي في مثالنا (على إعتبار أن إحتمال مجال الثقة هو 0.95، أي أن $Z = 2$):

$$\left[Y^*_{n+L} - 2x\frac{(3.68 - 0.44n_L + 1.74L)Y^*}{100}, Y^*_{n+L} + 2x\frac{(3.68 - 0.44n_L + 1.74L)Y^*}{100}\right]$$

وحيث أن $n_L = 22$ و $L = 5$ فإن مجال الثقة يكون:

$$\left[110.4 - 2x\frac{((3.68 - 0.44(22) + 1.74(5))110.4}{100}, 110.4 + 2x\frac{((3.68 - 0.44(22) + 1.74(5))110.4}{100}\right]$$

وأخيرا نجد:

$[77.94, 142.58]$ باحتمال قدره: 0.95

تمارين مختارة

التمرين الأول:

يمثل الجدول التالي، كمية اللحم المستهلكة للفرد الواحد في بلد ما.

السنة	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
كمية اللحم (كغ/فرد)	10	12	12	13	14	16	17	18	20	22

المطلوب:

- أرسم المنحنى التاريخي لهذه السلسلة،
- أوجد معادلة الإتجاه مع حساب معامل التحديد،
- أوجد معادلة التغيرات الدورية ثم مثلها بيانيا،
- ماهي الأخطاء الناجمة عن هذا التمثيل.

التمرين الثاني:

يمثل الجدول التالي إنتاج الجزائر من القمح، خلال 10 سنوات.

السنة	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
كمية القمح (قنطار)	1181	1035	573	702	707	926	768	632	492	585

المطلوب:

- شكل معادلة الإتجاه مع حساب معامل التحديد،
- بعد حساب الأخطاء التي تنجم عن عملية تنبأ (بطريقة الخطأ المتزايد)، كم سيكون إنتاج القمح في سنة 2000. ماهو مجال الثقة اللازم لهذا التنبؤ، عند إحتمال 0.95.

التمرين الثالث:

يمثل الجدول كميات الغاز المستهلكة (م^{3}) لمنطقة ما، بدلالة أربعة فصول:

الفصول / السنوات	I	II	III	IV
2000	1520	2514	3251	2458
2001	1879	2697	4523	1952
2002	2045	3258	3458	1523
2003	2486	3458	4856	2698

المطلوب:

- شكل المنحنى التاريخي لهذه السلسلة، قبل وبعد حساب المتوسطات المتحركةبطول 3، ماذا تستنتج؟.
- قدر التغيرات الموسمية لهذه السلسلة،
- قدر التغيرات العشوائية،
- شكل معادلة الإتجاه مع حساب معامل التحديد،

كم ستكون الكمية المستهلكة من الغاز تحت نفس الظروف في سنة 2006، أحسب كل الأخطاء الناجمة عن هذا التنبؤ.



المراجع

أ) باللغة العربية:

- **ابراهيم محمد العلي** (1980): مدخل في نظرية العينات. مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية. منشورات جامعة حلب، كلية الإقتصاد والتجارة.50 ص — 96 ص.
- **ابراهيم محمد العلي** (1982): نظرية الإرتباط. مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية. منشورات جامعة حلب، كلية الإقتصاد والتجارة. 250 صفحة. **بوعبد الله صالح** (2006):محاضرات الإحصاء الرياضي، لطلبة كلية العلوم الاقتصادية.
- **السعدي رجال** (1995): نظرية الإحتمال، مسائل وتمارين محلولة. ديوان المطبوعات الجامعية. الجزء الأول. 355 صفحة.
- **مواري شبيجل** (1998): الإحصاء. سلسلة ملخصات شوم، الطبعة الخامسة. الدار الدولية للنشر والتوزيع. القاهرة. مصر.564 صفحة.
- **سيمور ليبشتز** (1984): الإحتمالات. سلسلة ملخصات شوم. در اكجروهيل للنشر، دار المريخ بالملكة االعربية السعودية. 210 صفحة.
- **كنجو.أنيس** (1979): الإحصاء الرياضي. مطبعة زيد ابن ثابت. 544 صفحة.

ب) باللغة الأجنبية:

- CHAMBADAL.L (1978): Calcul des probabilités. Edition DUNOD.
- DAGNELIE.P (1982): Théorie et méthode statistique. Vol 1 et 2.
- GENET.J, PUPION.G et REPUSSARD.M (1974): Probabilités, statistiques et sondages. Edition Vuibert. 319 P.
- HAMDANI.H (2001): Statistique descriptive. Office des Publications Universitaires.259P.
- LEBART.L, MORINEAU.A , JABAR.N (1978): Techniques de la description statistiques, méthodes et logiciels pour l'analyse des grands tableau. Edition Dunod.351 P.
- MERCIER.M (1996): Biostatistique et probabilités. Collection PCEM. Edition Ellipses. 191 P.
- MURRAR.R.S (1981): Probabilités et statistiques. Séries Schaum. Edition McGraw – Hill. France et Canada. 385 P.
- SAPORTA.G (1982): Théories et méthodes de la statistique. Publications de l'institut français du pétrole. Société des éditions TECHNIP.386 P.

ملحق الجداول الإحصائية:

جدول **1**: إحتمالات ذو الحدين: $P(X=x)=C_n^x p^x q^{n-x}=\dfrac{n!}{(n-x)!x!}p^x q^{n-x}$

n = 10

k	p = 0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
1	0,9139	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
2	0,9885	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
3	0,9990	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
4	0,9999	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770
5	1,0000	0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230
6	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281
7	1.0000	1.0000	1.0000	0,9999	0,9996	0.9984	0.9952	0.9877	0.9726	0.9453
8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893
9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990
10	1,0000	1,0000	1.0000	1,0000	1,0000	1.0000	1,0000	1.0000	1.0000	1.0000

n=20

k	p = 0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0	0,3585	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,7358	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0021	0,0005	0,0001	0,0000
2	0,9245	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0121	0,0036	0,0009	0,0002
3	0,9841	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0444	0,0160	0,0049	0,0013
4	0,9974	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,1182	0,0510	0,0189	0,0059
5	0,9997	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,2454	0,1256	0,0553	0,0207
6	1,0000	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,4166	0,2500	0,1299	0,0577
7	1,0000	0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,6010	0,4159	0,2520	0,1316
8	1,0000	0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,7624	0,5956	0,4143	0,2517
9	1,0000	1,0000	0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,8782	0,7553	0,5914	0,4119
10	1.0000	1.0000	1.0000	0,9994	0,9961	0.9829	0.9468	0.8725	0.7507	0.5881
11	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9949	0,9804	0,9435	0,8692	0,7483
12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9987	0,9940	0,9790	0,9420	0,8684
13	1,0000	1,0000	1.0000	1,0000	1,0000	0.9997	0,9985	0.9935	0.9786	0.9423
14	1,0000	1,0000	1.0000	1,0000	1,0000	1.0000	0,9997	0.9984	0.9936	0.9793
15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9985	0,9941
16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1.0000	0,9997	0.9987
17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1.0000	1,0000	0.9998
18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

جدول2 – إحتمالات بواسون $P(X=k)=\dfrac{m^x e^{-m}}{k!}$

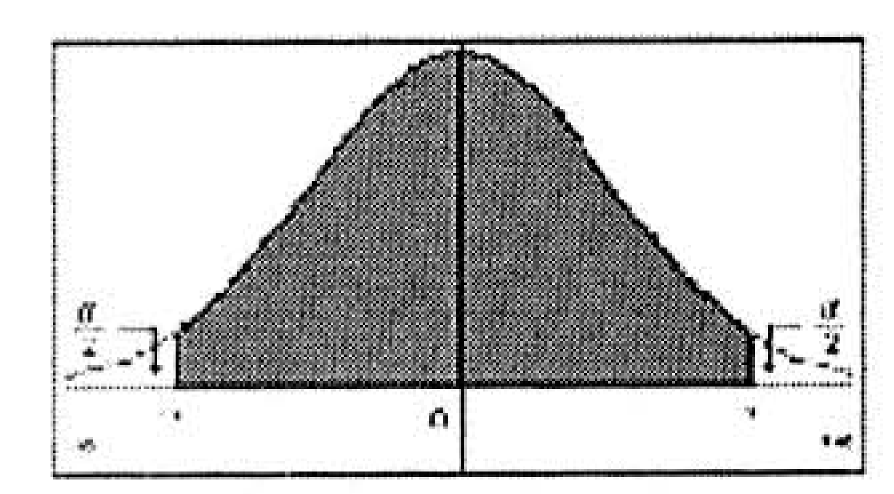
k	Probabilités individuelles $Pr(k) = e^{-m}\dfrac{m^k}{k!}$								
	m = 1,0	m = 1,5	m = 2,0	m = 2,5	m = 3,0	m = 3,5	m = 4,0	m = 4,5	m = 5,0
0	0,3679	0,2231	0,1353	0,0821	0,0498	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067
1	0,3679	0,3347	0,2707	0,2052	0,1494	0,1057	0,0733	0,0500	0,0337
2	0,1839	0,2510	0,2707	0,2565	0,2240	0,1850	0,1465	0,1125	0,0842
3	0,0613	0,1255	0,1804	0,2138	0,2240	0,2158	0,1954	0,1687	0,1404
4	0,0153	0,0471	0,0902	0,1336	0,1680	0,1888	0,1954	0,1898	0,1755
5	0,0031	0,0141	0,0361	0,0668	0,1008	0,1322	0,1563	0,1708	0,1755
6	0,0005	0,0035	0,0120	0,0278	0,0504	0,0771	0,1042	0,1281	0,1462
7	0,0001	0,0008	0,0034	0,0099	0,0216	0,0385	0,0595	0,0824	0,1044
8		0,0001	0,0009	0,0031	0,0081	0,0169	0,0298	0,0463	0,0653
9			0,0002	0,0009	0,0027	0,0066	0,0132	0,0232	0,0363
10				0,0002	0,0008	0,0023	0,0053	0,0104	0,0181
11					0,0002	0,0007	0,0019	0,0043	0,0082
12					0,0001	0,0002	0,0006	0,0016	0,0034
13						0,0001	0,0002	0,0006	0,0013
14							0,0001	0,0002	0,0005
15								0,0001	0,0002
16									0,0001

k	Probabilités individuelles $Pr(k) = e^{-m}\dfrac{m^k}{k!}$								
	m = 5,5	m = 6,0	m = 6,5	m = 7,0	m = 7,5	m = 8,0	m = 8,5	m = 9,0	m = 9,5
0	0,0041	0,0025	0,0015	0,0009	0,0006	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001
1	0,0225	0,0149	0,0098	0,0064	0,0041	0,0027	0,0017	0,0011	0,0007
2	0,0618	0,0446	0,0318	0,0223	0,0156	0,0107	0,0074	0,0050	0,0034
3	0,1133	0,0892	0,0688	0,0521	0,0389	0,0286	0,0208	0,0150	0,0107
4	0,1558	0,1339	0,1118	0,0912	0,0729	0,0573	0,0443	0,0337	0,0254
5	0,1714	0,1606	0,1454	0,1277	0,1094	0,0916	0,0752	0,0607	0,0483
6	0,1571	0,1606	0,1575	0,1490	0,1367	0,1221	0,1066	0,0911	0,0764
7	0,1234	0,1377	0,1462	0,1490	0,1465	0,1396	0,1294	0,1171	0,1037
8	0,0849	0,1033	0,1188	0,1304	0,1373	0,1396	0,1375	0,1318	0,1232
9	0,0519	0,0688	0,0858	0,1014	0,1144	0,1241	0,1299	0,1318	0,1300
10	0,0285	0,0413	0,0558	0,0710	0,0858	0,0993	0,1104	0,1186	0,1235
11	0,0143	0,0225	0,0330	0,0452	0,0585	0,0722	0,0853	0,0970	0,1067
12	0,0065	0,0113	0,0179	0,0264	0,0366	0,0481	0,0604	0,0728	0,0844
13	0,0028	0,0052	0,0089	0,0142	0,0211	0,0296	0,0395	0,0504	0,0617
14	0,0011	0,0022	0,0041	0,0071	0,0113	0,0169	0,0240	0,0324	0,0419
15	0,0004	0,0009	0,0018	0,0033	0,0057	0,0090	0,0136	0,0194	0,0265
16	0,0001	0,0003	0,0007	0,0014	0,0026	0,0045	0,0072	0,0109	0,0157
17		0,0001	0,0003	0,0006	0,0012	0,0021	0,0036	0,0058	0,0088
18			0,0001	0,0002	0,0005	0,0009	0,0017	0,0029	0,0046
19				0,0001	0,0002	0,0004	0,0008	0,0014	0,0023
20					0,0001	0,0002	0,0003	0,0006	0,0011
21						0,0001	0,0001	0,0003	0,0005
22							0,0001	0,0001	0,0002
23									0,0001
24									

جدول3 – إحتمالات التوزيع الطبيعي القياسي.

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0754
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2258	.2291	.2324	.2367	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.267[illegible]	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2996	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998
3.6	.4998	.4998	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.7	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.8	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.9	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000

جدول 4 – إحتمالات توزيع t.



α	1	0,8	0,6	0,4	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1 − α	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,998	0,999
ν = ddl											
1	0.0000	0.3249	0.7265	1.3764	3.0777	6.3137	12.706	31,821	63.656	318.29	636.58
2	0.0000	0.2887	0.6172	1.0607	1.8856	2.9200	4,3027	6.9645	9.9250	22.328	31,600
3	0.0000	0.2767	0.5844	0.9785	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8408	10.214	12,924
4	0.0000	0.2707	0.5686	0.9410	1.5332	2.1318	2.7765	3.7469	4.6041	7,1729	8.6101
5	0.0000	0.2672	0.5594	0.9195	1.4759	2.0150	2,5706	3.3649	4.0321	5,8935	6.8685
6	0.0000	0.2648	0.5534	0.9057	1.4398	1.9432	2,4469	3.1427	3.7074	5,2075	5.9587
7	0.0000	0.2632	0.5491	0.8960	1.4149	1.8946	2,3646	2.9979	3.4995	4,7853	5.4081
8	0.0000	0.2619	0.5459	0.8889	1.3968	1.8595	2,3060	2.8965	3.3554	4,5008	5.0414
9	0.0000	0.2610	0.5435	0.8834	1.3830	1.8331	2,2622	2.8214	3.2498	4,2969	4.7809
10	0.0000	0.2602	0.5415	0.8791	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	4,1437	4.5868
11	0.0000	0.2596	0.5399	0.8755	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058	4,0248	4,4369
12	0.0000	0.2590	0.5386	0.8726	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545	3,9296	4.3178
13	0.0000	0.2586	0.5375	0.8702	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123	3,8520	4.2209
14	0.0000	0.2582	0.5366	0.8681	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768	3,7874	4,1403
15	0.0000	0.2579	0.5357	0.8662	1.3406	1.7531	2.1315	2.6025	2.9467	3,7329	4.0728
16	0.0000	0.2576	0.5350	0.8647	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208	3,6861	4.0149
17	0.0000	0.2573	0.5344	0.8633	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982	3,6458	3.9651
18	0.0000	0.2571	0.5338	0.8620	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784	3,6105	3.9217
19	0.0000	0.2569	0.5333	0.8610	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609	3,5793	3.8833
20	0.0000	0.2567	0.5329	0.8600	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453	3,5518	3.8496
21	0.0000	0.2566	0.5325	0.8591	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314	3,5271	3.8193
22	0.0000	0.2564	0.5321	0.8583	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188	3.5050	3.7922
23	0.0000	0.2563	0.5317	0.8575	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073	3.4850	3.7676
24	0.0000	0.2562	0.5314	0.8569	1.3178	1.7109	2,0639	2.4922	2.7970	3,4668	3.7454
25	0.0000	0.2561	0.5312	0.8562	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874	3.4502	3.7251
26	0.0000	0.2560	0.5309	0.8557	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787	3.4350	3.7067
27	0.0000	0.2559	0.5306	0.8551	1.3137	1.7033	2,0518	2.4727	2.7707	3,4210	3.6895
28	0.0000	0.2558	0.5304	0.8546	1.3125	1.7011	2,0484	2.4671	2.7633	3,4082	3.6739
29	0.0000	0.2557	0.5302	0.8542	1.3114	1.6991	2,0452	2.4620	2.7564	3,3963	3.6595
30	0.0000	0.2556	0.5300	0.8538	1.3104	1.6973	2,0423	2.4573	2.7500	3.3852	3.6460
40	0.0000	0.2550	0.5286	0.8507	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045	3.3069	3.5510
50	0.0000	0.2547	0.5278	0.8489	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778	3.2614	3.4960
60	0.0000	0.2545	0.5272	0.8477	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603	3.2317	3.4602
70	0.0000	0.2543	0.5268	0.8468	1.2938	1.6669	1.9944	2.3808	2.6479	3.2108	3.4350
80	0.0000	0.2542	0.5265	0.8461	1.2922	1.6641	1,9901	2.3739	2.6387	3,1952	3.4164
90	0.0000	0.2541	0.5263	0.8456	1.2910	1.6620	1.9867	2.3685	2.6316	3,1832	3.4019
100	0.0000	0.2540	0.5261	0.8452	1.2901	1.6602	1,9840	2.3642	2.6259	3,1738	3.3905
200	0.0000	0.2537	0.5252	0.8434	1.2858	1.6525	1,9719	2.3451	2.6006	3,1315	3.3398
∞	0.0000	0.2533	0.5244	0.8416	1.2816	1.6449	1,9600	2.3263	2.5758	3,0903	3.2906

جدول 5 – إحتمالات توزيع F عند $\alpha = 5\%$.

0,95 0,05 f

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245	245	246	246	247	247
2	18·5	19·0	19·2	19·2	19·3	19·3	19·4	19·4	19·4	19·4	19·4	19·4	19·4	19·4	19·4	19·4	19·4	19·4
3	10·1	9·55	9·28	9·12	9·01	8·94	8·89	8·85	8·81	8·79	8·76	8·74	8·73	8·71	8·70	8·69	8·68	8·67
4	7·71	6·94	6·59	6·39	6·26	6·16	6·09	6·04	6·00	5·96	5·94	5·91	5·89	5·87	5·86	5·84	5·83	5·82
5	6·61	5·79	5·41	5·19	5·05	4·95	4·88	4·82	4·77	4·74	4·70	4·68	4·66	4·64	4·62	4·60	4·59	4·58
6	5·99	5·14	4·76	4·53	4·39	4·28	4·21	4·15	4·10	4·06	4·03	4·00	3·98	3·96	3·94	3·92	3·91	3·90
7	5·59	4·74	4·35	4·12	3·97	3·87	3·79	3·73	3·68	3·64	3·60	3·57	3·55	3·53	3·51	3·49	3·48	3·47
8	5·32	4·46	4·07	3·84	3·69	3·58	3·50	3·44	3·39	3·35	3·31	3·28	3·26	3·24	3·22	3·20	3·19	3·17
9	5·12	4·26	3·86	3·63	3·48	3·37	3·29	3·23	3·18	3·14	3·10	3·07	3·05	3·03	3·01	2·99	2·97	2·96
10	4·96	4·10	3·71	3·48	3·33	3·22	3·14	3·07	3·02	2·98	2·94	2·91	2·89	2·86	2·85	2·83	2·81	2·80
11	4·84	3·98	3·59	3·36	3·20	3·09	3·01	2·95	2·90	2·85	2·82	2·79	2·76	2·74	2·72	2·70	2·69	2·67
12	4·75	3·89	3·49	3·26	3·11	3·00	2·91	2·85	2·80	2·75	2·72	2·69	2·66	2·64	2·62	2·60	2·58	2·57
13	4·67	3·81	3·41	3·18	3·03	2·92	2·83	2·77	2·71	2·67	2·63	2·60	2·58	2·55	2·53	2·51	2·50	2·48
14	4·60	3·74	3·34	3·11	2·96	2·85	2·76	2·70	2·65	2·60	2·57	2·53	2·51	2·48	2·46	2·44	2·43	2·41
15	4·54	3·68	3·29	3·06	2·90	2·79	2·71	2·64	2·59	2·54	2·51	2·48	2·45	2·42	2·40	2·38	2·37	2·35
16	4·49	3·63	3·24	3·01	2·85	2·74	2·66	2·59	2·54	2·49	2·46	2·42	2·40	2·37	2·35	2·33	2·32	2·30
17	4·45	3·59	3·20	2·96	2·81	2·70	2·61	2·55	2·49	2·45	2·41	2·38	2·35	2·33	2·31	2·29	2·27	2·26
18	4·41	3·55	3·16	2·93	2·77	2·66	2·58	2·51	2·46	2·41	2·37	2·34	2·31	2·29	2·27	2·25	2·23	2·22
19	4·38	3·52	3·13	2·90	2·74	2·63	2·54	2·48	2·42	2·38	2·34	2·31	2·28	2·26	2·23	2·21	2·20	2·18
20	4·35	3·49	3·10	2·87	2·71	2·60	2·51	2·45	2·39	2·35	2·31	2·28	2·25	2·22	2·20	2·18	2·17	2·15
21	4·32	3·47	3·07	2·84	2·68	2·57	2·49	2·42	2·37	2·32	2·28	2·25	2·22	2·20	2·18	2·16	2·14	2·12
22	4·30	3·44	3·05	2·82	2·66	2·55	2·46	2·40	2·34	2·30	2·26	2·23	2·20	2·17	2·15	2·13	2·11	2·10
23	4·28	3·42	3·03	2·80	2·64	2·53	2·44	2·37	2·32	2·27	2·23	2·20	2·18	2·15	2·13	2·11	2·09	2·07
24	4·26	3·40	3·01	2·78	2·62	2·51	2·42	2·36	2·30	2·25	2·21	2·18	2·15	2·13	2·11	2·09	2·07	2·05
25	4·24	3·39	2·99	2·76	2·60	2·49	2·40	2·34	2·28	2·24	2·20	2·16	2·14	2·11	2·09	2·07	2·05	2·04
26	4·23	3·37	2·98	2·74	2·59	2·47	2·39	2·32	2·27	2·22	2·18	2·15	2·12	2·09	2·07	2·05	2·03	2·02
27	4·21	3·35	2·96	2·73	2·57	2·46	2·37	2·31	2·25	2·20	2·17	2·13	2·10	2·08	2·06	2·04	2·02	2·00
28	4·20	3·34	2·95	2·71	2·56	2·45	2·36	2·29	2·24	2·19	2·15	2·12	2·09	2·06	2·04	2·02	2·00	1·99
29	4·18	3·33	2·93	2·70	2·55	2·43	2·35	2·28	2·22	2·18	2·14	2·10	2·08	2·05	2·03	2·01	1·99	1·97
30	4·17	3·32	2·92	2·69	2·53	2·42	2·33	2·27	2·21	2·16	2·13	2·09	2·06	2·04	2·01	1·99	1·98	1·96
32	4·15	3·29	2·90	2·67	2·51	2·40	2·31	2·24	2·19	2·14	2·10	2·07	2·04	2·01	1·99	1·97	1·95	1·94
34	4·13	3·28	2·88	2·65	2·49	2·38	2·29	2·23	2·17	2·12	2·08	2·05	2·02	1·99	1·97	1·95	1·93	1·92
36	4·11	3·26	2·87	2·63	2·48	2·36	2·28	2·21	2·15	2·11	2·07	2·03	2·00	1·98	1·95	1·93	1·92	1·90
38	4·10	3·24	2·85	2·62	2·46	2·35	2·26	2·19	2·14	2·09	2·05	2·02	1·99	1·96	1·94	1·92	1·90	1·88
40	4·08	3·23	2·84	2·61	2·45	2·34	2·25	2·18	2·12	2·08	2·04	2·00	1·97	1·95	1·92	1·90	1·89	1·87
42	4·07	3·22	2·83	2·59	2·44	2·32	2·24	2·17	2·11	2·06	2·03	1·99	1·96	1·93	1·91	1·89	1·87	1·86
44	4·06	3·21	2·82	2·58	2·43	2·31	2·23	2·16	2·10	2·05	2·01	1·98	1·95	1·92	1·90	1·88	1·86	1·84
46	4·05	3·20	2·81	2·57	2·42	2·30	2·22	2·15	2·09	2·04	2·00	1·97	1·94	1·91	1·89	1·87	1·85	1·83
48	4·04	3·19	2·80	2·57	2·41	2·29	2·21	2·14	2·08	2·03	1·99	1·96	1·93	1·90	1·88	1·86	1·84	1·82
50	4·03	3·18	2·79	2·56	2·40	2·29	2·20	2·13	2·07	2·03	1·99	1·95	1·92	1·89	1·87	1·85	1·83	1·81
55	4·02	3·16	2·77	2·54	2·38	2·27	2·18	2·11	2·06	2·01	1·97	1·93	1·90	1·88	1·85	1·83	1·81	1·79
60	4·00	3·15	2·76	2·53	2·37	2·25	2·17	2·10	2·04	1·99	1·95	1·92	1·89	1·86	1·84	1·82	1·80	1·78
65	3·99	3·14	2·75	2·51	2·36	2·24	2·15	2·08	2·03	1·98	1·94	1·90	1·87	1·85	1·82	1·80	1·78	1·76
70	3·98	3·13	2·74	2·50	2·35	2·23	2·14	2·07	2·02	1·97	1·93	1·89	1·86	1·84	1·81	1·79	1·77	1·75
80	3·96	3·11	2·72	2·49	2·33	2·21	2·13	2·06	2·00	1·95	1·91	1·88	1·84	1·82	1·79	1·77	1·75	1·73
90	3·95	3·10	2·71	2·47	2·32	2·20	2·11	2·04	1·99	1·94	1·90	1·86	1·83	1·80	1·78	1·76	1·74	1·72
100	3·94	3·09	2·70	2·46	2·31	2·19	2·10	2·03	1·97	1·93	1·89	1·85	1·82	1·79	1·77	1·75	1·73	1·71
125	3·92	3·07	2·68	2·44	2·29	2·17	2·08	2·01	1·96	1·91	1·87	1·83	1·80	1·77	1·75	1·72	1·70	1·69
150	3·90	3·06	2·66	2·43	2·27	2·16	2·07	2·00	1·94	1·89	1·85	1·82	1·79	1·76	1·73	1·71	1·69	1·67
200	3·89	3·04	2·65	2·42	2·26	2·14	2·06	1·98	1·93	1·88	1·84	1·80	1·77	1·74	1·72	1·69	1·67	1·66
300	3·87	3·03	2·63	2·40	2·24	2·13	2·04	1·97	1·91	1·86	1·82	1·78	1·75	1·72	1·70	1·68	1·66	1·64
500	3·86	3·01	2·62	2·39	2·23	2·12	2·03	1·96	1·90	1·85	1·81	1·77	1·74	1·71	1·69	1·66	1·64	1·62
1000	3·85	3·00	2·61	2·38	2·22	2·11	2·02	1·95	1·89	1·84	1·80	1·76	1·73	1·70	1·68	1·65	1·63	1·61
∞	3·84	3·00	2·60	2·37	2·21	2·10	2·01	1·94	1·88	1·83	1·79	1·75	1·72	1·69	1·67	1·64	1·62	1·60

جدول 6 – إحتمالات توزيع F عند 1% = α.

مثلا: عند درجة حرية $\nu_1=9, \nu_2=11$، فإن قيمة F = 4.63

(Les valeurs de la première ligne doivent être multipliées par 10)

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	405	500	540	563	576	586	593	598	602	606	608	611	613	614	616	617	618	619
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	27.1	27.0	26.9	26.9	26.8	26.8	26.8
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.4	14.3	14.2	14.2	14.2	14.1	14.1
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.96	9.89	9.82	9.77	9.72	9.68	9.64	9.61
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79	7.72	7.66	7.60	7.56	7.52	7.48	7.45
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.54	6.47	6.41	6.36	6.31	6.27	6.24	6.21
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.73	5.67	5.61	5.56	5.52	5.48	5.44	5.41
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11	5.05	5.00	4.96	4.92	4.89	4.86
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.77	4.71	4.65	4.60	4.56	4.52	4.49	4.46
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.46	4.40	4.34	4.29	4.25	4.21	4.18	4.15
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.22	4.16	4.10	4.05	4.01	3.97	3.94	3.91
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02	3.96	3.91	3.86	3.82	3.78	3.75	3.72
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80	3.75	3.70	3.66	3.62	3.59	3.56
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67	3.61	3.56	3.52	3.49	3.45	3.42
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.62	3.55	3.50	3.45	3.41	3.37	3.34	3.31
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52	3.46	3.40	3.35	3.31	3.27	3.24	3.21
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.43	3.37	3.32	3.27	3.23	3.19	3.16	3.13
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.36	3.30	3.24	3.19	3.15	3.12	3.08	3.05
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.29	3.23	3.18	3.13	3.09	3.05	3.02	2.99
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.24	3.17	3.12	3.07	3.03	2.99	2.96	2.93
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.18	3.12	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91	2.88
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.14	3.07	3.02	2.97	2.93	2.89	2.86	2.83
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.09	3.03	2.98	2.93	2.89	2.85	2.82	2.79
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	3.06	2.99	2.94	2.89	2.85	2.81	2.78	2.75
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	3.02	2.96	2.90	2.86	2.82	2.78	2.74	2.72
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.99	2.93	2.87	2.82	2.78	2.75	2.71	2.68
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.96	2.90	2.84	2.79	2.75	2.72	2.68	2.65
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.93	2.87	2.81	2.77	2.73	2.69	2.66	2.63
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.91	2.84	2.79	2.74	2.70	2.66	2.63	2.60
32	7.50	5.34	4.46	3.97	3.65	3.43	3.26	3.13	3.02	2.93	2.86	2.80	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.55
34	7.44	5.29	4.42	3.93	3.61	3.39	3.22	3.09	2.98	2.89	2.82	2.76	2.70	2.66	2.62	2.58	2.55	2.51
36	7.40	5.25	4.38	3.89	3.57	3.35	3.18	3.05	2.95	2.86	2.79	2.72	2.67	2.62	2.58	2.54	2.51	2.48
38	7.35	5.21	4.34	3.86	3.54	3.32	3.15	3.02	2.92	2.83	2.75	2.69	2.64	2.59	2.55	2.51	2.48	2.45
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.73	2.66	2.61	2.56	2.52	2.48	2.45	2.42
42	7.28	5.15	4.29	3.80	3.49	3.27	3.10	2.97	2.86	2.78	2.70	2.64	2.59	2.54	2.50	2.46	2.43	2.40
44	7.25	5.12	4.26	3.78	3.47	3.24	3.08	2.95	2.84	2.75	2.68	2.62	2.56	2.52	2.47	2.44	2.40	2.37
46	7.22	5.10	4.24	3.76	3.44	3.22	3.06	2.93	2.82	2.73	2.66	2.60	2.54	2.50	2.45	2.42	2.38	2.35
48	7.19	5.08	4.22	3.74	3.43	3.20	3.04	2.91	2.80	2.72	2.64	2.58	2.53	2.48	2.44	2.40	2.37	2.33
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.79	2.70	2.63	2.56	2.51	2.46	2.42	2.38	2.35	2.32
55	7.12	5.01	4.16	3.68	3.37	3.15	2.98	2.85	2.75	2.66	2.59	2.53	2.47	2.42	2.38	2.34	2.31	2.28
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.56	2.50	2.44	2.39	2.35	2.31	2.28	2.25
65	7.04	4.95	4.10	3.62	3.31	3.09	2.93	2.80	2.69	2.61	2.53	2.47	2.42	2.37	2.33	2.29	2.26	2.23
70	7.01	4.92	4.08	3.60	3.29	3.07	2.91	2.78	2.67	2.59	2.51	2.45	2.40	2.35	2.31	2.27	2.23	2.20
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.64	2.55	2.48	2.42	2.36	2.31	2.27	2.23	2.20	2.17
90	6.93	4.85	4.01	3.54	3.23	3.01	2.84	2.72	2.61	2.52	2.45	2.39	2.33	2.29	2.24	2.21	2.17	2.14
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59	2.50	2.43	2.37	2.31	2.26	2.22	2.19	2.15	2.12
125	6.84	4.78	3.94	3.47	3.17	2.95	2.79	2.66	2.55	2.47	2.39	2.33	2.28	2.23	2.19	2.15	2.11	2.08
150	6.81	4.75	3.92	3.45	3.14	2.92	2.76	2.63	2.53	2.44	2.37	2.31	2.25	2.20	2.16	2.12	2.09	2.06
200	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50	2.41	2.34	2.27	2.22	2.17	2.13	2.09	2.06	2.02
300	6.72	4.68	3.85	3.38	3.08	2.86	2.70	2.57	2.47	2.38	2.31	2.24	2.19	2.14	2.10	2.06	2.03	1.99
500	6.69	4.65	3.82	3.36	3.05	2.84	2.68	2.55	2.44	2.36	2.28	2.22	2.17	2.12	2.07	2.04	2.00	1.97
1000	6.66	4.63	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.43	2.34	2.27	2.20	2.15	2.10	2.06	2.02	1.98	1.95
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.25	2.18	2.13	2.08	2.04	2.00	1.97	1.93

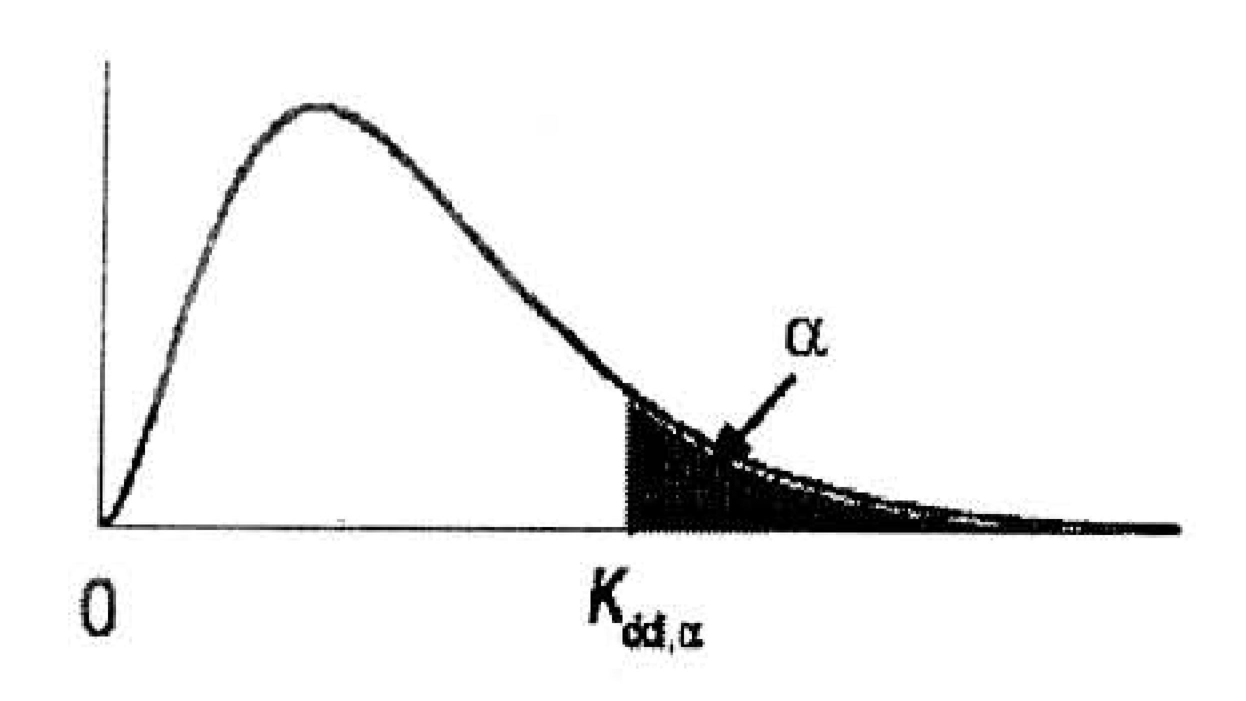
جدول 7 – إحتمالات توزيع χ^2

مثلا: عند درجة حرية 11، ومساحة p =0.90 أي α =0.10 فإن

$\chi^2 = 17.275$

La table donne la probabilité α pour que χ^2 égale ou dépasse une valeur donnée, en fonction du nombre de degrés de liberté (d. d. l.)

Quand le nombre de degrés de liberté est élevé, $\sqrt{2\chi^2}$ est à peu près distribué normalement autour de $\sqrt{2(d.d.l.) - 1}$ avec une variance égale à 1



ddl \ α	0,90	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,0158	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	0,211	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	0,584	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,266
4	1,064	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,467
5	1,610	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,515
6	2,204	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	2,833	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	3,490	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	4,168	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	4,865	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	5,578	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	6,304	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	7,042	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	7,790	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141	36,123
15	8,547	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	9,312	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	10,085	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
18	10,865	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	11,651	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	12,443	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	13,240	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	14,041	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	14,848	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	15,659	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	16,473	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	52,620
26	17,292	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	18,114	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	18,939	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	19,768	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	20,599	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

جدول 8 – جدول قيم Z المقابلة لقيم r.

تقرأ قيم Z من خلال السطر ثم العمود، وبداخل الجدول تقرأ قيم r

مثلا: من أجل r = 0.821 نجد Z = 1.16

$$r = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$z = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{1 + r}{1 - r}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0100	0,0200	0,0300	0,0400	0,0500	0,0599	0,0699	0,0798	0,0898
0,1	0,0997	0,1096	0,1194	0,1293	0,1391	0,1489	0,1586	0,1684	0,1781	0,1877
0,2	0,1974	0,2070	0,2165	0,2260	0,2355	0,2449	0,2548	0,2636	0,2729	0,2821
0,3	0,2913	0,3004	0,3095	0,3185	0,3275	0,3364	0,3452	0,3540	0,3627	0,3714
0,4	0,3800	0,3885	0,3969	0,4053	0,4136	0,4219	0,4301	0,4382	0,4462	0,4542
0,5	0,4621	0,4699	0,4777	0,4854	0,4930	0,5005	0,5080	0,5154	0,5227	0,5299
0,6	0,5370	0,5441	0,5511	0,5580	0,5649	0,5717	0,5784	0,5850	0,5915	0,5980
0,7	0,6044	0,6107	0,6169	0,6231	0,6291	0,6351	0,6411	0,6469	0,6527	0,6584
0,8	0,6640	0,6696	0,6751	0,6805	0,6858	0,6911	0,6963	0,7014	0,7064	0,7114
0,9	0,7163	0,7211	0,7259	0,7306	0,7352	0,7398	0,7443	0,7487	0,7531	0,7574
1,0	0,7616	0,7658	0,7699	0,7739	0,7779	0,7818	0,7857	0,7895	0,7932	0,7969
1,1	0,8005	0,8041	0,8076	0,8110	0,8144	0,8178	0,8210	0,8243	0,8275	0,8306
1,2	0,8337	0,8367	0,8397	0,8426	0,8455	0,8483	0,8511	0,8538	0,8565	0,8591
1,3	0,8617	0,8643	0,8668	0,8692	0,8717	0,8741	0,8764	0,8787	0,8810	0,8832
1,4	0,8854	0,8875	0,8896	0,8917	0,8937	0,8957	0,8977	0,8996	0,9015	0,9033
1,5	0,9051	0,9069	0,9087	0,9104	0,9121	0,9138	0,9154	0,9170	0,9186	0,9201
1,6	0,9217	0,9232	0,9246	0,9261	0,9275	0,9289	0,9302	0,9316	0,9329	0,9341
1,7	0,9354	0,9336	0,9379	0,9391	0,9402	0,9414	0,9425	0,9436	0,9447	0,9458
1,8	0,9468	0,94783	0,94884	0,94983	0,95080	0,95175	0,95268	0,95359	0,95449	0,95537
1,9	0,95624	0,95709	0,95792	0,95873	0,95953	0,96032	0,96109	0,96185	0,96259	0,96331
2,0	0,96403	0,96473	0,96541	0,96609	0,96675	0,96739	0,96803	0,96865	0,96926	0,96986
2,1	0,97045	0,97103	0,97159	0,97215	0,97269	0,97323	0,97375	0,97426	0,97477	0,97526
2,2	0,97574	0,97622	0,97668	0,97714	0,97752	0,97803	0,97846	0,97888	0,97929	0,97970
2,3	0,98010	0,98049	0,98087	0,98124	0,98161	0,98197	0,98233	0,98267	0,98301	0,98335
2,4	0,98367	0,98399	0,98431	0,98462	0,98492	0,98522	0,98551	0,98579	0,98607	0,98635
2,5	0,98661	0,98688	0,98714	0,98739	0,98764	0,98788	0,98812	0,98835	0,98858	0,98881
2,6	0,98903	0,98924	0,98945	0,98966	0,98987	0,99007	0,99026	0,99045	0,99064	0,99083
2,7	0,99101	0,99118	0,99136	0,99153	0,99170	0,99185	0,99202	0,99218	0,99233	0,99248
2,8	0,99263	0,99278	0,99292	0,99306	0,99320	0,99333	0,99346	0,99359	0,99372	0,99384
2,9	0,99396	0,99408	0,99420	0,99431	0,99443	0,99454	0,99464	0,99475	0,99485	0,99495

مصدر الجداول الإحصائية:

SAPORTA.G (1982): Théories et méthodes de la statistique. *Publications de l'institut français du pétrole. Société des éditions TECHNIP.386 P.*

الفهرس

الفصل الثاني
إختبار الفرضيات

الفصل الثالث

نظرية العينات

الفصل الرابع

التقديـــر

الفصل الخامس

نظرية الإرتباط

الفصل السادس
السلاسل الزمنية و تحليلها

أنجز طبعه على مطابع
ديوان المطبوعات الجامعية
1، الساحة المركزية - بن عكنون - الجزائر

معتوق أمحمد

الإحصاء الرياضي والنماذج الإحصائية



ديوان المطبوعات الجامعية